

الجبر المجرد

بِطَرِيقَةِ التَّعَلُّمِ الذَّاتِي النَّشِطِ

تأليف

نيل ديفدسون (N. Davidson) فرانس جيوليك

تَرْجَمَهُ

الدكتور ديب حسين

رَاجَعَهُ عِلْمِيًّا الدكتور محمد عرفات النشيه
رَاجَعَهُ لُغَوِيًّا الدكتور احمد سعيّدان

منشورات مجمع اللغة العربية الاردني

حقوق الطبع والترجمة محفوظة لمجمع اللغة العربية الاردني

١٤٠٣هـ - ١٩٨٢م

« المحتوى »

الصفحة	الموضوع
٧	المقدمة
١١	رسالة الطالب
١٩	الفصل ١ الزمر ، تعاريف وأمثلة
٢١	١,١ العمليات الثنائية
٣٠	١,٢ الزمر
٣٦	١,٣ الخصائص الأولية للزمر
٤٠	١,٤ عملية ثنائية على مجموعات من الاقترانات
٤٩	١,٥ زمر التبديلات
٥٧	١,٦ زمر التماثل للأشكال الهندسية
٦١	١,٧ التطابق في مضاعفات ن
٦٤	١,٨ زمر الجمع
٦٩	مراجعة
٧٥	الفصل ٢ نظرية الزمر ، ١
٧٦	٢,١ الزمر الجزئية

الموضوع	الصفحة
٢,٢ رتب العناصر	٨٣
٢,٣ نظرية لاجرانج والمجموعات المرافقة	٨٨
٢,٤ الاقترانات المحافظة	٩٥
٢,٥ التشاكل	١٠١
٢,٦ الزمر الدورية	١٠٨
٢,٧ الزمر الجزئية الطبيعية	١١١
٢,٨ الزمر الخارجة	١١٦
٢,٩ الصور المحافظة والزمر الخارجة	١٢٢
٢,١٠ لمحة تاريخية	١٣٢
مراجعة	١٣٦
الفصل ٣	١٤١
٣,١ الحلقات والحلقات الكاملة والحقول	١٤١
٣,٢ الحلقات : التعريف والامثلة	١٤٢
٣,٢ الخصائص الأولية للحلقة	١٤٦
٣,٣ الحلقات الجزئية والمثاليات	١٤٩
٣,٤ الاقترانات المحافظة	١٥٦
٣,٥ الحلقات الحدودية	١٦١
٣,٦ الحلقات الكاملة	١٧٠
٣,٧ الحقول	١٧٤
٣,٨ حقول الخوارج	١٨٤
مراجعة	١٨٩
فصل ٤	١٩٥
٤,١ نظرية الزمر ، ٢	١٩٥
٤,١ الدورات والنقلات ، في زمر التبديلات	١٩٥
٤,٢ التبديلات الزوجية والفردية	٢٠٦
٤,٣ الاقترانات المحافظة الذاتية والمرافقات	٢١١
٤,٤ الجداءات المباشرة الخارجة	٢١٧
٤,٥ الجداءات المباشرة الداخلية	٢٢٢
مراجعة	٢٢٧
الفصل ٥	٢٣١
٥,١ الحلقات الخارجة والمثاليات	٢٣١
٥,١ المثاليات في الحلقات الدورية	٢٣١

الموضوع	الصفحة
٥,٢ الحلقات الخارجة	٢٤٠
٥,٣ المثاليات الأولية وحلقاتها الخارجة	٢٤٥
٥,٤ المثاليات القصوى وحلقاتها الخارجة	٢٤٨
٥,٥ المثاليات القصوى في حلقات الاقتوانات	٢٥٣
مراجعة	٢٥٨
الملاحق	٢٦٠
١ المجموعات	٢٦٠
٢ المنطق وطرق البرهان	٢٦١
٣ الخصائص الجبرية والترتيبية للاعداد	٢٧٦
٤ علاقات التكافؤ	٢٧٩
٥ الترتيب الحسن والاستقراء	٢٨٤
٦ بعض الخصائص الحسابية للاعداد الصحيحة	٢٩٣
ملاحظات مساعدة لحل المسائل	٣٠٨
جدول بالمصطلحات والمفردات الرياضية وترجمتها	٣١٧

المقدمة

لقد نشأت فكرة هذا الكتاب من انتقادنا لطريقة التعليم التقليدية وما يرافقها من تعلم الطالب بالتلقين. ومع البحث المكثف عن البدائل الممكنة قررنا استعمال طريقة التعلم بواسطة المجموعات الصغيرة، حيث يدرس الطالب مادة مساق كالجبر المجرد في مجموعات كل مجموعة من حوالي اربعة أعضاء. اما المدرس فمهمته ان يحل المشاكل التي تصادفها مجموعات الطلبة لا ان يحاضر.

وبطريقة المجموعات الصغيرة هذه يعمل الطلاب على السبورة متعاونين، في مجموعات فيبرهنون النظريات ، ويحلون المسائل ، ويضعون تفصيلات الامثلة المعطاة ، ويعطون امثلة جديدة وامثلة مضادة وكذلك يبتكرون الفرضيات. اما المدرس فيمضي من مجموعة الى اخرى ، كلما لمس الحاجة الى مساعدته فيقدم اقتراحاته ، مشجعاً الطلاب ، ويتأكد من سلامة البراهين والحلول (تفصيلات هذه العملية التعليمية معطاة في كتاب المدرس).

والهدف من طريقة التعليم بمجموعات صغيرة هو خلق مناخ تعاوني متبادل يجري فيه الانتقاد بلا خوف ولا وجل ، ولا يقع فيه تنافس (الا ما قد يقع بين المجموعات). ونتيجة لذلك لا يحتاج المدرس ان يقف باستمرار محاولاً جذب انتباه الطلبة لادائه على السبورة ، ويصبح لديه الوقت والفرصة لمراقبة طلبته وفهمهم فرداً فرداً ، بطريقة افضل ، فيعرف الذين عندهم اية مشاكل (دون التأخر الذي قد يمتد الى حين ظهور نتائج الامتحان). كما يساعد الطلبة المبدعين والذين يمكن ان يستفيدوا من تحديات اضافية. وبالرغم من ان الطلاب يغطون في الجبر المجرد

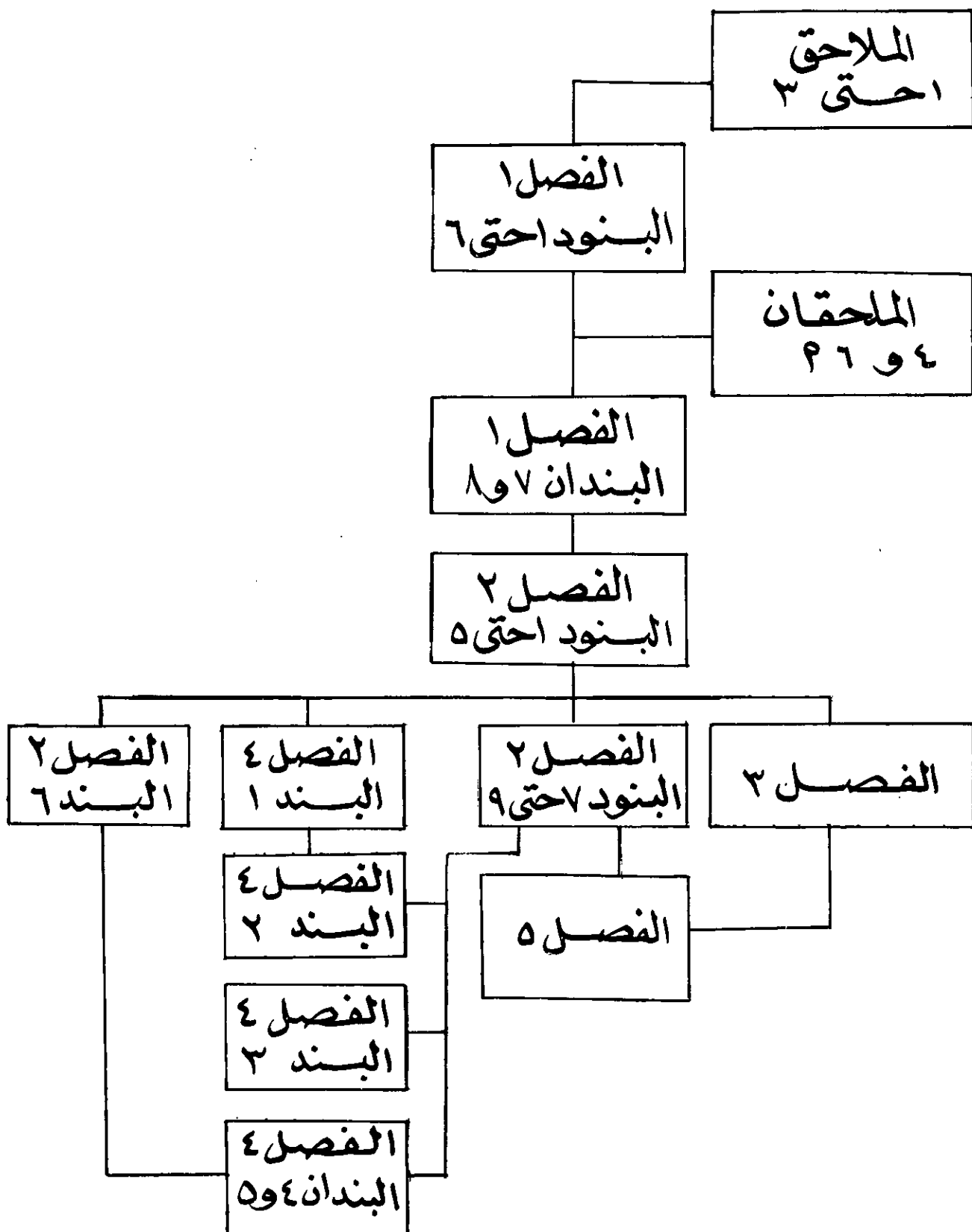
مادة اقل نوعاً من المادة التي يمكن تغطيتها بطريقة المحاضرة التقليدية، الا اننا نعتقد ان فائدة طريقتنا لكل من المدرس والطالب على السواء تعوضهما عن هذا النقص وتزيد.

وبالرغم من ان هذا الكتاب قد صمم بخاصة لطريقة المجموعات الصغيرة الا اننا نعتقد انه يمكن استخدامه مع اسلوبين آخرين من اساليب التدريس ، احدهما طريقة الاكتشاف الموجه من قبل المدرس بتبادل الحوار بين المدرس وطلبة (طريقة سقراط)، على النحو الذي وضعه جورج بوليا. والثاني هو طريقة محصنة لطريقة ر. ل. مور في الاكتشاف الفردي للطلبة الاذكياء.

يحتوي الكتاب على المواضيع العادية التي يضمنها اول مساق في الجبر المجرد . غير اننا وضعنا في حسابنا مجالا عريضا من اختلاف القدرات لدى القراء فوضعنا امثلة كثيرة نعتبرها وسائل للفهم العميق للمفاهيم والنظريات . وتتضمن الملاحق مناقشات قصيرة لنظرية المجموعات والمنطق الرياضي وانواع البراهين وعلاقات التكافؤ والاستقراء والترتيب ونظرية الاعداد . وترد هذه المواضيع في اماكن مختلفة من الكتاب ولذا يجب ان تدرس في اوائل الفصل. وقد كتبت هذه المواضيع بصيغة مصممة للقراءة خارج قاعة التدريس ونتيجة لذلك فان الوقت المخصص لمناقشة الافكار المحتواة في الملاحق يجب ان يكون اقل ما يمكن.

ويبين المخطط التالي التسلسلات المختلفة التي يمكن ان تؤخذ بها مادة المساق. اما المساق النموذجي الذي نقترحه فهو قراءة الملاحق ثم دراسة الفصل الاول ، والبنود ٢,١ حتى ٢,٥ ، ٢,٧ ، ٢,٩ ، والفصل الثالث مع حذف البندين ٣,٥ و ٣,٨ اذا دعت الضرورة . وتدل خبرتنا الماضية على ان مادة كهذه (لصف متوسط) تحتاج الى حوالي ٤٢ ساعة تدريسية فاذا بدا أن الوقت لا يتسع لهذا كله فان احدى البدائل هي حذف البنود ٢,٧ حتى ٢,٩ مؤقتاً ، وتخصيص ساعتين في نهاية الفصل لمحاضرات على المواد المتضمنة فيها. وقد وضعنا في مرشد المدرس عدة اقتراحات لتقليل الزمن اللازم لتغطية هذه المادة.

ويتضمن الفصلان ٤ ، ٥ مواضيع اختيارية . فالفصل ٤ تقع بنوده في ثلاث مجموعات منفصلة : فالبندان ٤,١ و ٤,٢ عن زمر التبديلات ، والبند ٤,٣ في الاقترانات المحافظة الذاتية للزمر ، والبندان ٤,٤ و ٤,٥ عن الجمع المباشر للزمر والزمر الجزئية. اما بند ٥,١ عن الحلقات الحدودية فيورد عدة امثلة قيمة عن بنود سابقة وهي قيمة في حد ذاتها ، واما البنود ٥,٢ حتى ٥,٥ فتكون وحدة واحدة على المثاليات.



رسالة للطالب

عزيزي الطالب

قد لا يكون لديك خبرة في العمل مع جماعة . فاعلم ان الوفاق الذي تجعله بينك وبين مجموعتك سيكون له الاثر العظيم على تجديد قدرتك على العمل واستمتاعك به، لهذه الاسباب نقترح عليك الارشادات التالية :

اعمل مع زملائك الطلبة بطريقة تعاونية.
شارك في قيادة المجموعة وعلى الكل ان يشارك وليس لاحد ان يسيطر على المنافسة.
لتضع كل مجموعة حلاً واحداً لكل مسألة.
تحل كل مسألة على السبورة ويشارك افراد المجموعة كل بدوره في الكتابة.
تأكد من ان كل واحد في المجموعة يفهم الحل قبل البدء بمسألة جديدة.
ليسأل من لم يفهم اياً من الأفكار المطروحة وليجب على الاسئلة من يستطيع.
اصغ باهتمام وحاول توسيع الافكار وتوضيحها.
لا تهتم بعمل المجموعات الاخرى ، يجب على كل مجموعة ان تسير في خطواتها الخاصة بها.
ولتيسير طريقك خلال الكتابة نوضح لك فيما يلي الاصطلاحات التي ستقابلها.
خلال كل فصل هناك تعاريف ومسائل وفرضيات ونظريات وتمهيدات ترقم بالتتابع . وهكذا
ستجد سلاسل من مواد كالتالية :

١. تعريف

٢. مسألة

٣. مسألة

برهن النظرية التالية

نظرية

٤. تعريف

٥. مسألة

وفي بعض السلاسل قد لا يكون هناك مسألة ١ أو ٤ أو تعريف ٢ أو ٣ . ان الترتيم المتتابع للعبارات انما هو لمساعدة القاريء في تعيين مواقع المواد المختلفة.

كثيراً ما نذكر مواد من فصل غير الفصل الذي نقرؤه . في مثل هذه الحالات نقول ببساطة ، المسألة ٥ من الفصل ١ مثلاً . فاذا ذكرت عبارة دون رقم فصل محدد (مثلاً مسألة ٥) . فيكون المقصود المسألة ٥ من الفصل الذي نقرؤه . ولتبسيط الاشارة الى النظريات والتمهيدات التي ترد في المسائل نستعمل رقم المسألة ولا نعطي النظرية رقماً منفصلاً . وهكذا ، اذا اردنا ان نشير الى النظرية التي تظهر في المسألة ٣ ، نقول ببساطة النظرية ٣.

وبطريقة مماثلة تعامل الاشارات للنظريات ، وللتعاريف الخ ... الموجودة في الملاحق وهكذا يمكن ان نذكر النظرية ١٠ في الملاحق ٦.

وبالاضافة للمسائل فهناك تمارين . فالمسائل الواردة ضمن الشرح تحل مع المجموعة في الصف والتمارين التي في نهاية كل بند هي للحل في البيت فرادي أو جماعات حسب رغبة المدرس.

وعندما نشير الى تمرين في نهاية البند الذي ندرسه ، نقول ببساطة ، التمرين ٨ مثلاً . فاذا اشرنا الى تمرين في بند آخر ، من فصل قريء ام لم يقرأ ، يسبق رقم البند رقم التمرين . وهكذا فالاشارة الى التمرين ٣,١ - ٦ تعني انك يجب ان تنظر التمرين ٦ من الوظيفة البيتية عند نهاية البند ٣,١. وتعطى الاشارات الى تمارين الملاحق بالكامل ، مثلاً التمرين ٢ في الملاحق ٦.

وتقسم بعض الملاحق الى بنود ، يشار اليها باحرف . فعندما نشير الى بند في الملاحق الذي ندرسه ، نقول ، البند هـ مثلاً . وعندما تكون الاشارة الى بند في ملحق آخر ، او عندما نشير

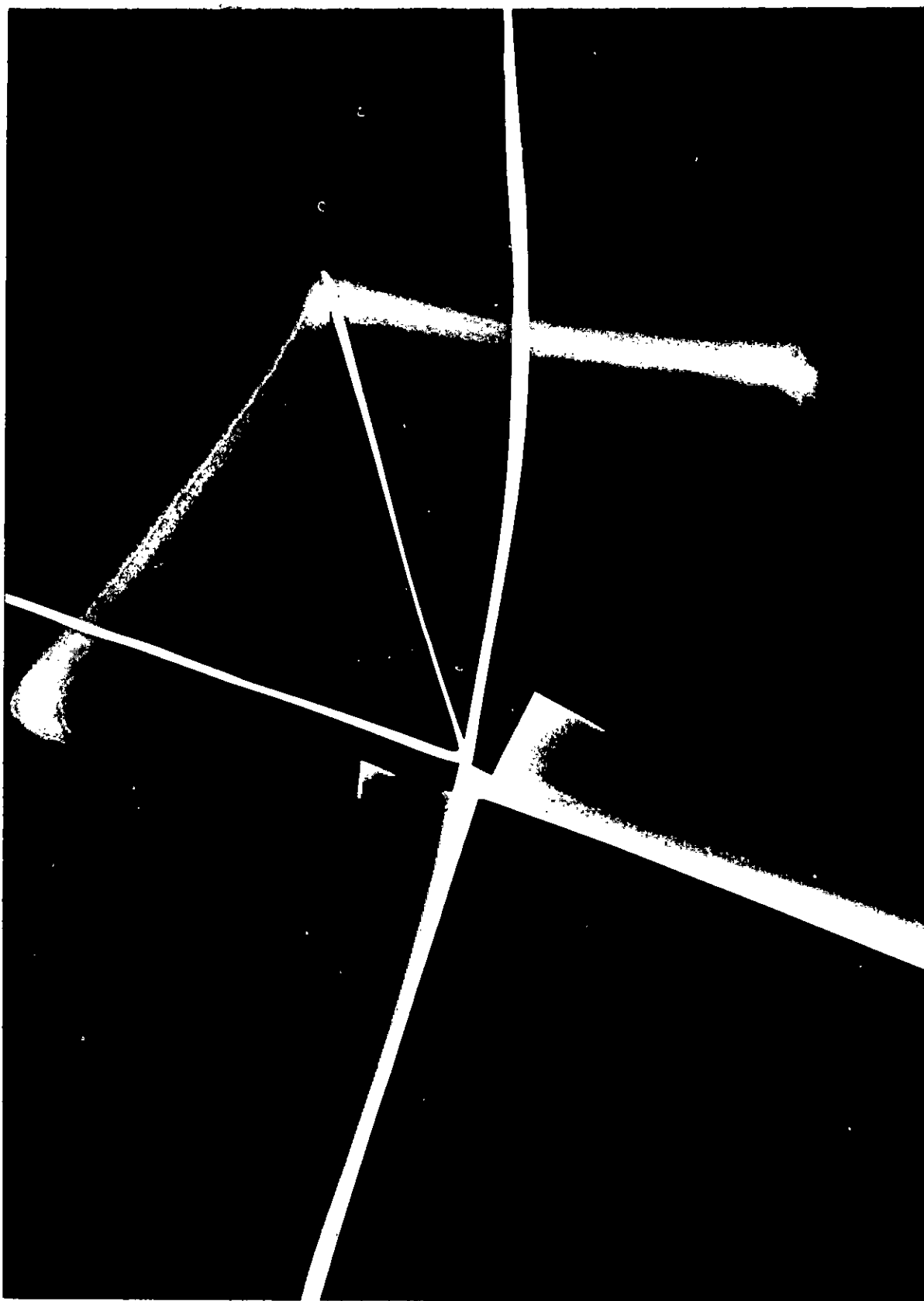
الى بند في فصول الكتاب يتبع حرف البند مباشرة رقم الملحق كما في مثل البند ٤و.
وتجد احياناً الرمز ▲ عند نهاية مسألة او الرمز ● عند نهاية تمرين . يشير هذان
الرمزان بأن هناك ١ - شاداً لحل تلك المسألة او ذلك التمرين في آخر الكتاب. وتشير النجمة (★)
قبل رقم التمرين ان التمرين سيشار اليه او يستعمل في تمرين قادم أو مسألة. وغالباً ما توضع
خطوط لكتابة الاجابات على نسختك من الكتاب.

المؤلفان

مقدمة المترجم

لقد استعنت في كثير من الاحيان بمعجم مصطلحات الرياضيات في التعليم العالي الصادر عن معاجم المؤتمر الثالث للتعريب والتي نشرتها المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم - مكتب تنسيق التعريب في الرباط ، التابع لجامعة الدول العربية. وقد اجتهدت بوضع مفردات مناسبة لبعض المصطلحات التي لم اجد لها فيها.

اما من ناحية الرموز فقد استعملت الاحرف الاغريقية كما هي مثل α ، β ، γ ، وبعض الاحرف الانجليزية التي تستعمل في معظم مقررات الرياضيات مثل A ، S ، R ، Q ، Z ، $\mathbb{D}$ ، الا ان الرموز الثلاثة الاخيرة قد حولتها الى الشكل S ، A و D . وكثيراً ما استعملت الحروف s ، v ، e ، l ، . . لتعبر عن مجموعات معينة وقد وضعت في نهاية الكتاب فهرساً في المصطلحات الواردة في هذا الكتاب.



الفصل الأول

الزمر (تعاريف وأمثلة)

ما هو الجبر المجرد ؟ ان كلمة (جبر) تذكرنا بموضوع درسناه في المدرسة الثانوية يبحث في حل المعادلات الخطية والحدودية وقد ادت دراسة حلول مثل هذه المعادلات الى ما نسميه الآن بالجبر المجرد . فلنعط وصفاً موجزاً للتطور التاريخي للموضوع.

ان السؤال الاساسي الذي شغل الرياضيين منذ العصور القديمة هو ايجاد الحلول للمعادلات الحدودية العامة التي تأخذ الصيغة

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

حيث $a_0, a_1, \dots, a_n$ هي اعداد حقيقية و $a_n \neq 0$

فكانت المسألة ايجاد قيمة x التي تجعل لهذه المعادلات حلولاً يمكن التعبير عنها بصيغة تحتوي فقط على عمليات من الجمع ، والطرح ، والضرب ، والقسمة ، وأخذ الجذور مهما تكن قيم المعاملات $a_0, a_1, \dots, a_n$.

وفي مطلع القرن التاسع كان العرب قد نشروا الحلول عندما $n = 2$ (اي المعادلة

التربيعية التي على الصيغة $س^2 + ب س + ج = ٠$ ، وهذه الحلول هي ما ينجم عن الصيغة التربيعية :

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ج}}{٢}$$

حيث $ب^2 - ٤ج$ غير سالب

وبعد فترة طويلة جاءت الخطوة التالية ففي القرن السادس عشر فقط تمكن الرياضيان تارتاليا وفيراري من ايجاد الحلول العامة للمعادلات ذات الدرجة الثالثة (ن = ٣) والرابعة (ن = ٤). * وعلى اية حال فانه خلال القرنين السابع عشر والثامن عشر كانت المعادلة ذات الدرجة الخامسة لا تزال تستعصي على الحل رغم كل المحاولات لايجاد حل عام لها ولسبب واضح .

ففي عام ١٨٢٨ تمكن الرياضي النرويجي نيلز هنريك ابييل باستخدام طرق جبرية فقط من البرهنة وبشكل قاطع على ان المعادلة العامة من الدرجة الخامسة (اي عندما ن = ٥) ليس لها حل بطريقة جبرية محضة.

وفي دراسة للمسألة قبل ذلك بنحو خمسين سنة استعمل لاجرانج تعويضات (تسمى اليوم تباديل او تبديلات) ، وتوصل الى صيغ للمعادلات ذات الدرجة الثالثة والدرجة الرابعة . وبعد ذلك ترجم الرياضيون عمله في التبديلات وكذلك اعمال رياضيي القرن التاسع عشر امثال چالواوكوشي الى المصطلحات التي نراها في هذا الكتاب وغيره من كتب الجبر المجرد وهكذا فان اساسيات الجبر المجرد موجودة وخاصة في الاعمال التي قام بها هؤلاء الرجال الثلاثة . والحقيقة فقد استعمل كل من كوشي وچالوا كلمة «زمرة» في دراستهم للتعويضات (التبديلات) ولحلل المعادلات الحدودية . وتدرجياً ادت اعمال هؤلاء الرياضيين العظماء الى دراسة الزمر ، والحلقات والحقول وهي المواضيع الرئيسية في الجبر المجرد.

*تقتضي الموضوعية العلمية ان نذكر هنا حقيقتين:

- ١ - حل ابن الهيثم المعادلة الرابعة على نحو يشير الى ان فراري لم يات بجديد.
- ٢ - كان العرب يقسمون المعادلة التكعيبية الى ١٣ نوعاً وقد حل تارتاليا نوعين منها بطريقة سرقها من كاردن ونشرها . وثمة مجال للظن بان تارتاليا اخذ طريقته من كتاب عربي ما يزال مجهولاً . والمعروف ان عمر الخيام حل المعادلات التكعيبية بطريقة تقاطع القطوع المخروطية (المدقق).

سندرس في هذا الكتاب الأفكار الاساسية للزمر والحلقات والحقول وسنبدا بالزمر فنعرف الزمرة ونعطي امثلة عليها ثم ننتقل الى التبديلات فنفحص بشكل خاص خصائص الاقترانات الشبيهة بالزمر. وفي نهاية الفصل الأول سنرى امثلة اخرى على الزمر المنتهية اعتماداً على الهندسة ونظرية الاعداد.

١٠١ العمليات الثنائية

من الأفكار الاساسية في الرياضيات فكرة العملية مثل جمع الاعداد الحقيقية أو ضربها. وفيهما تعين لاي عنصرين من المجموعة عنصراً ثالثاً منها. ولكي نعرف فكرة العملية تعريفاً دقيقاً نحتاج الى مفهومين آخرين : الاول هو الاقتران وهذا قد يكون معروفاً لدى القاريء من الجبر أو التفاضل والتكامل :

١. تعريف :

الاقتران من المجموعة S الى المجموعة S هو قاعدة تعين لكل $s \in S$ عنصراً واحداً فقط $s \mapsto s'$ ونرمز الى هذا العنصر s' بالرمز $q(s)$. فالمجموعة S هي مجال q والمجموعة S هي مدى q .

وبشكل عام نرمز للاقتران بالرمز $q: S \rightarrow S$ ، حيث q هو رمز للقاعدة ، S هو المجال ، S هو المدى .

والامثلة على الاقترانات تشمل الآتي : q من مجموعة الاعداد الحقيقية اليها معرّفاً بالقاعدة :

$$\begin{aligned} q(s) &= s^2 + s \\ \text{وكذلك ل : } \{2, 1\} - \{3, 2, 1\} &\text{ معرّفاً كما يلي :} \\ \text{ل } (1) = 1 , \text{ ل } (2) = 2 , \text{ ل } (3) = 2 . \\ \text{وبالتأكيد ان القاعدة م : } \{2, 1\} - \{3, 2, 1\} & \\ \text{المعرفة م } (1) = 1 , \text{ م } (2) = 2 , \text{ م } (3) = 3 &\text{ ليست اقتراناً.} \\ \text{(لماذا ؟)} & \end{aligned}$$

وفي هذا الكتاب جعلنا لكل من الرموز R, Q, Z المدلولات التالية :

$$Z = \text{المجموعة المكونة من كل الاعداد الصحيحة} \\ = \{ \dots, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \dots \}$$

$$Q = \text{المجموعة المكونة من الاعداد النسبية}$$

$$= \left\{ \frac{p}{q} : p \in Z, q \in \mathbb{N}, q \neq 0 \right\}$$

$$R = \text{المجموعة المكونة من كل الاعداد الحقيقية}$$

وبالاضافة الى ذلك نستعمل احياناً المجموعات

$${}^+Z = \{ s : s \in Z \text{ و } s > 0 \}$$

$${}^+Q = \{ s : s \in Q \text{ و } s > 0 \}$$

$${}^+R = \{ s : s \in R \text{ و } s > 0 \}$$

وفي هذا الكتاب سنتخذ خصائص معينة لجمع الاعداد الحقيقية وطرحها كحقائق مسلم بها . وفي الملحق ٢ ملخص لهذه الخصائص . ويمكن استعمال هذه الخصائص في المسائل اللاحقة.

وفي الملحق تلخيص لفاهيم نظرية المجموعات .

٢. مسألة :

اي من القواعد التالية تعرف اقتراناً من R الى R ؟

علل اجابتك

$$a \quad \text{و} \quad (s) = s^2$$

$$b \quad \text{و} \quad (s) = s, \text{ حيث } s^2 = s$$

$$c \quad \text{و} \quad (s) = s, \text{ حيث } s^2 = s, \text{ و } s \leq 0$$

ويمكن ان تعطى قواعد الاقترانات بطرق عديدة ومختلفة . فمثلاً ، الاقتران q :

$$R \rightarrow R \text{ يمكن ان يعطى بقاعدة منفردة مثل } q(s) = s^3 - s^2 \text{ ويمكننا ان نعرف}$$

اقتراناً آخر $q : R \rightarrow R$ بقاعدة معقدة نسبياً مثل :

$$q(s) = \begin{cases} s^2 & (s \geq 0) \\ s^2 - 1 & (s < 0) \end{cases}$$

ومن جهة اخرى اذا احتوت مجموعة منتهية عدداً صغيراً من العناصر فيمكن

ذكر قاعدة الاقتران بوضع عناصر المجموعة والصور المقابلة في القائمة ، وهكذا اذا كانت $s \in \{a, b, c\}$ فيمكن تعريف الاقتران $\varphi: s \mapsto s'$ بوضع $\varphi(a) = b$ و $\varphi(b) = c$ ، $\varphi(c) = a$ أو بواسطة جدول مثل :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

أو بجدول مثل الجدول ١،١

س	$\varphi(s)$
a	b
b	c
c	a

الجدول ١،١

٣. تعريف :

لتكن s, s' مجموعتان فيكون الضرب الديكارتي للمجموعتين s, s' هو المجموعة

$$s \times s' = \{(s, s') : s \in s, s' \in s'\}$$

وتسمى عناصر الضرب الديكارتي بالازواج المرتبة.

ان المستوى الاحداثي $\mathbb{R}^2$ هو مثال على الضرب الديكارتي وفي هذه الحالة فهو الضرب الديكارتي للمجموعة $\mathbb{R}$ المكونة من الاعداد الحقيقية مع نفسها. واليك امثلة على عناصر $\mathbb{R}^2$: $(1, 0)$ ، $(\sqrt{3}-, \sqrt{3}-)$ ، $(\frac{1}{2}, -2)$ ، $(\pi, 2)$ الخ.

والاقتران الذي مجاله الضرب الديكارتي $s \times s'$ الى s له اسم خاص.

٤. تعريف :

العملية الثنائية على المجموعة s هي اقتران من $s \times s$ الى s . وهكذا فان اي عملية ثنائية ما هي الا قاعدة $\circ$ تعين لكل زوج مرتب (a, b) في $s \times s$ عنصراً واحداً بالضبط من عناصر s ويرمز لهذا العنصر بالرمز $a \circ b$ والرمز $a \circ b$ الذي هو صورة الزوج (a, b) ، يدعى مركبة هذا الزوج المرتب (ما لم يذكر غير ذلك) وتسمى العملية $\circ$ تركيباً .

واكثر الامثلة المألوفة على العمليات الثنائية هما عمليتا جمع الاعداد الحقيقية وضربها. وهذان هما على الترتيب الاقترانات $R \times R \xrightarrow{+} R$ معرفاً بالعلاقة $(a, b) \mapsto a + b$ ،

$R \times R \xrightarrow{\cdot} R$ معرفاً بالعلاقة $(a, b) \mapsto a \cdot b$ أو (a, b) .

وكالعادة تسمى $a+b$ حاصل جمع a مع b وتسمى ab حاصل الضرب.

لاحظ ان هناك نقطتين يجب فحصهما للتحقق من ان القاعدة المعطاة تعرف عملية ثنائية على المجموعة S .

اولا : يجب ان تكون القاعدة اقتراناً معرفاً تعريفاً سليماً : فيجب ان تعين لكل زوج مرتب $(a, b) \in S \times S$ عنصراً واحداً بالضبط $a \circ b$.

ومن الامثلة على هذا المطلب مثال تقدمه المجموعة Q للاعداد النسبية : ففيها يمكن كتابة العنصر $\frac{1}{2}$ بالصيغ $\frac{2}{4}$ ، $\frac{4}{8}$ ، $\frac{1}{3}$ وهكذا ، بينما يمكن كتابة العنصر $\frac{3}{4}$ بالصيغ $\frac{6}{8}$ ، $\frac{9}{12}$ ، $\frac{18}{24}$ وهكذا . فاي عملية ثنائية معرفة على الاعداد النسبية يجب ان تعين للزوج المرتب $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ نفس العدد الذي تعينه للازواج المرتبة $(\frac{2}{4}, \frac{3}{4})$ ، $(\frac{4}{8}, \frac{3}{4})$ ، $(\frac{1}{2}, \frac{6}{8})$ ، $(\frac{1}{2}, \frac{9}{12})$ وهكذا . . . يجب الا يعتمد الجواب على الاسمين المختارين لعناصر الزوج . ونعبر عن هذا عادة بقولنا ان الاقتران معرف تعريفاً صحيحاً او حسن التعريف . ولهذا اذا كانت العملية جمعاً في Q فيجب ان ينتج ان

$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} = \frac{1}{2} + \frac{6}{8} = \frac{1}{2} + \frac{9}{12} = \frac{1}{2} + \frac{18}{24}$. . . وهكذا ولعظم العمليات المفروضة على مجموعة اختيارية S لا كلها ، يكون شرط كونها اقتراناً معرفاً تعريفاً صحيحاً امراً ظاهراً تماماً لا يحتاج الى برهان والشرط الثاني في تعريف العملية الثنائية هو ان يكون لكل زوج $(a, b) \in S \times S$ صورة $a \circ b$ هي نفسها عنصراً في S . وبعبارة اخرى يؤكد هذا الشرط ان يكون لكل $a, b \in S$ صورة $a \circ b \in S$. وقد استعملت في الماضي العبارة « S مغلقة بالنسبة للعملية $\circ$ » للتعبير عن هذه الخاصية . ففي اي عملية معطاة يجب التحقق من وجود خاصية الانغلاق هذه .

فصفوة القول انه لكي نبرهن على ان قاعدة معينة تعرف عملية ثنائية $\circ$ على S يجب ان نبرهن ان القاعدة هي اقتران معرف تعريفاً سليماً وان S مغلقة بالنسبة للقاعدة $\circ$.

٥. مسألة :

١. هل التناظر المعرف بالصيغة $(a, b) \mapsto a - b$

لكل $(a, b) \in Z \times Z$ هو عملية ثنائية على Z ؟

ب. هل القسمة عملية ثنائية على مجموعة الاعداد الصحيحة المغايرة للصفر $Z - \{0\}$ ؟

اي انه اذا كانت قاعدة تناصر معرفة على ان م(س) = ص

$$\frac{f}{g} \leftarrow (p, b) \text{ بالصيغة } (\{0\} - Z) \times (\{0\} - Z)$$

فهل هذا يعرف عملية ثنائية على $\{0\} - Z$ ؟

وفي دراستنا اللاحقة سيكون اهتمامنا منصبا على عمليات ثنائية لها خصائص معينة ولهذا السبب سنقدم مفهومي العمليات الثنائية التجميعية والتبديلية.

٦. تعريف :

١. تكون العملية الثنائية $\circ$ على المجموعة S تجميعية اذا وفقط اذا كان لكل p, b, c $\Rightarrow$

$$p \circ (b \circ c) = (p \circ b) \circ c$$

ب. تكون العملية الثنائية $\circ$ على المجموعة S تبديلية اذا وفقط اذا كان لكل زوج p, b $\Rightarrow$

$$p \circ b = b \circ p$$

٧. مسألة :

عين اي العمليات التالية على مجموعة الاعداد الحقيقية تجميعية او تبديلية .
(استعمل الخصائص الموجودة في الملحق ٢ لايجاد حل سريع لهذه المسألة)

- أ الجمع
- ب الطرح
- ج الضرب

اننا نألف العمليات التبديلية ولذلك قد يسأل المرء هل هناك مجموعة ذات اهمية خاصة تجري عليها عملية ثنائية تجميعية. وليست تبديلية. كانت اول مرة ظهرت فيها مجموعة من الاعداد تجري عليها عملية ضرب غير تبديلية عام ١٨٤٣ على يد هاملتون الذي تأثر بالفرضيات الأولية للمجموعة الى حد انه حفر القاعدة الرئيسية على جسر في دوبرن (انظر التمرين ١٠-٣,٧). وقد وضع كايلى مثالا آخر وكايلى هذا له الفضل في ابتكار المصفوفات فهو أول من وضع اسس نظرية المصفوفات بطريقة منظمة. وسندرس هنا وفي بنود قادمة احدى المجموعات البسيطة من المصفوفات.

٨. تعريف :

افرض ان M (R) هي مجموعة المصفوفات ذات الرتبة 2×2

$$\text{اي } \begin{pmatrix} p & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ حيث المدخلات حقيقية}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{د} & \text{هـ} \end{pmatrix} : \text{أ، ب، د، هـ} \in R \right\} = (R)$$

في التعريف تكون المصفوفتان من الرتبة 2×2 متساويتين إذا فقط إذا كانت مدخلاتهما المتقابلة متساوية وبهذا يكون

$$\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{د} & \text{هـ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{و} & \text{ز} \\ \text{ن} & \text{ع} \end{pmatrix} \quad \text{إذا وفقط إذا كان}$$

$$\text{أ} = \text{و} ، \text{ب} = \text{ز} ، \text{د} = \text{ن} ، \text{هـ} = \text{ع}$$

ويعرف الجمع على (R) ويرمز له بالرمز + بوضوح

$$\begin{pmatrix} \text{أ}^+ & \text{ب}^+ \\ \text{د}^+ & \text{هـ}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{و} & \text{ز} \\ \text{ن} & \text{ع} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{د} & \text{هـ} \end{pmatrix}$$

٩. مسألة :

- هل الجمع المعطى في التعريف ٨ عملية ثنائية على (R) ؟
 - هل هو عملية تجميعية ؟
 - هل الجمع عملية تبديلية ؟
- علل اجابتك

١٠. تعريف :

يعرف الضرب على (R) ، والذي يرمز له بالرمز • بالصيغة

$$\begin{pmatrix} \text{أ}^+ & \text{ب}^+ \\ \text{د}^+ & \text{هـ}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{و} & \text{ز} \\ \text{ن} & \text{ع} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{د} & \text{هـ} \end{pmatrix}$$

وقد نتج هذا الضرب الغريب عن العمل في انظمة من المعادلات الخطية واقتترانات خاصة و: $R^2 \leftarrow R$ بالصيغة :

$$(و، ز) = (س + ب، ص + د)$$

وسنكشف هذه العلاقة بين الضرب والاقترانات الخاصة فيما بعد في التمرين ٤، ١، ٥.

١١. مسألة :

- هل ضرب المصفوفات عملية ثنائية على (R) ؟ وضح.

ب. برهن ان ضرب المصفوفات عملية تجميعية.

ج. هل ضرب المصفوفات عملية تبديلية ؟ علل اجابتك.

إذا كانت س_ه مجموعة منتهية صغيرة فمن الملائم أحياناً أن نعرف أي عملية ثنائية على س_ه بواسطة جدول يمكن بناؤه كما يلي :

تكتب جميع عناصر المجموعة س_ه في السطر الأعلى من الجدول . وكذلك تكتب عمودياً بنفس الترتيب في الجهة اليمنى من الجدول. ولكي تحسب المركبة س^هص ، عين أولاً الصف الذي تكون فيه س على اليمين . ففي هذا الصف تظهر س^هص في العمود الذي يكون العنصر ص في اعلاه . ولهذا فإن س^هص موجودة في الصف الذي يحدده س (على يمين الجدول) والعمود الذي يحدده ص (في أعلى الجدول) ، كما يظهر في الجدول ١،٢ ، وهذا الاصطلاح مستعمل في جميع جداول العمليات خلال الكتاب.

ص . . .	ه
.	.
.	.
.	.
ص ه ص	س

الجدول ١,٢

١٢. مسألة :

لبقراءة الجدول ١,٢ عبر الصف الثاني لاحظان :

— = ۵۰ پ، — = ۵۰ ح، ح = پ.پ، پ = ۵۰ پ

۵	۲	ب	ح	د
۱	۲	ب	ح	د
ب	ب	ح	د	۲
ح	ح	د	۲	ب
د	د	۲	ب	ح

الجدول ١,٣

ب. اثبت ان الجدول ١,٢ يعرف عملية ثنائية على المجموعة $S = \{1, 2, 3, 4\}$. تذكر انه يجب

- عليك ان تثبت (١) ان التناظر (س، ص) س ص كما هو معروف بالجدول ١,٣ هو اقتتران معرف تعريفاً صحيحاً و (٢) ان س مغلقة بالنسبة لهذا الاقتتران .
- حـ . افحص حالة خاصة للخاصية التجميعية للعملية بحساب ب هـ (حـ د) وكذلك (ب هـ د) .
- وافحص بعد ذلك حالة اخرى للخاصية التجميعية .
- د . هل العملية هـ تبديلية ؟ صف اختياراً بسيطاً للتبديلية بفحص الجدول ١,٣ .

تمارين

١. افرض ان ٢، ب عدنان حقيقيان
عرف ٥٢ ب بانه العدد $٥٢ = ٢ + ب - ب$
وبذا اثبت ان هـ تعرف عملية ثنائية على R . هل العملية تجميعية؟ تبديلية؟ علل اجاباتك.
٢. * (تشير النجمة الى ان هذا التمرين سيشار اليه او يستعمل في تمرين قادم) .
بين في كل من المجموعات التالية فيما اذا كان الجمع عملية ثنائية عليها ام لا . علل-اجاباتك.
٢. ١. Z ، أي المجموعة المكونة من جميع الاعداد الصحيحة الموجبة.
ب. المجموعة المكونة من جميع الاعداد الزوجية :
$$\{2n : n \in Z\}$$

حـ . المجموعة المكونة من جميع الاعداد الفردية :
$$\{2n + 1 : n \in Z\}$$

د.
$$\{n^2 : n \in Z\}$$

هـ .
$$\{n^2 \neq 2 : n \in Z\} \cup \{0\}$$
٣. * لتكن س = {٢، ب، د، ح} .
عرف تناظراً (س، ص) س ص باستعمال الجدول ١,٤ .
٢. بين ان هذا التناظر يعرف عملية ثنائية على س .
ب. هل العملية تبديلية؟
حـ . افحص حالتين خاصتين للخاصية التجميعية لهذه العملية؟

٥	٢	ب	حـ	د
٢	٢	ب	حـ	د
ب	ب	٢	د	حـ
حـ	حـ	د	٢	ب
د	د	حـ	ب	٢

الجدول ١,٤

٤. * لتكن ${}^2R = R \times R$. عرف ارتباطاً .

${}^2R \times {}^2R \xrightarrow{+} {}^2R$ بوضع

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

لكل $(a, b), (c, d) \in {}^2R$.

٢. اثبت ان $+$ هي عملية ثنائية على ${}^2R$. تدعى هذه العملية بالجمع ويدعى

$$(a, b) + (c, d) \text{ حاصل جمع } (a, b) \text{ مع } (c, d)$$

ب. برهن ان الجمع هو عملية تجميعية على ${}^2R$.

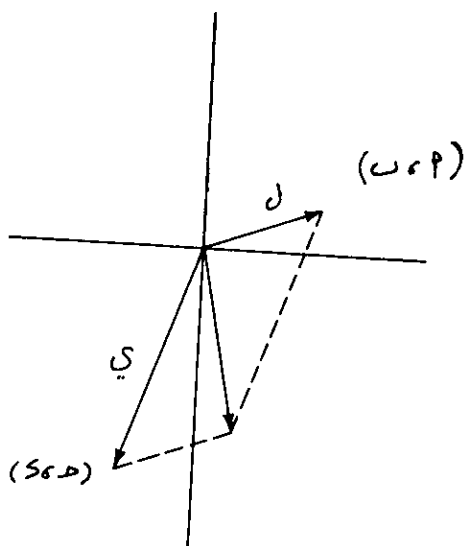
ح. برهن ان الجمع هو عملية تبديلية على ${}^2R$.

د. عين نقطتين (a, b) و (c, d) في ${}^2R$. ولتكن l القطعة المستقيمة من $(0, 0)$ الى (a, b) وي القطعة

المستقيمة من $(0, 0)$ الى (c, d) . اكمل متوازي الاضلاع الذي ضلعا l وي ورؤوسه (a, b) ، $(0, 0)$ ،

(c, d) ، كما هو مبين في الشكل ١,١ . بين ان $(a, b) + (c, d)$ هو الرأس الرابع لمتوازي الاضلاع

هذا .



الشكل ١,١

٥. لنفرض ان $a \star b$ لكل $(a, b) \in Q \times Q$ معرفة كالآتي :

$$a \star b = \begin{cases} a & \text{اذا كانت } a < b \\ b & \text{اذا كانت } b < a \\ a & \text{اذا كانت } a = b \end{cases}$$

فتكون $a \star b$ هي القيمة الأعظم من بين a و b .

٢. أوجد $P \star Q$ لعدة قيم تأخذها P و Q .

علل اجاباتك للمسائل التالية :

ب. هل $\star$ عملية ثنائية على Q ؟

ج. هل $\star$ عملية تجميعية ؟

د. هل $\star$ عملية تبديلية ؟

٦. لكل $P, Q \in Q$: ضع

$$P \circ Q = \frac{P+Q}{K}$$

حيث K عدد صحيح موجب وثابت (اذا كانت $K = 2$ فان $P \circ Q$ هي متوسط P و Q . علل

اجاباتك على الاسئلة التالية :

٢. هل $\circ$ عملية ثنائية على Q ؟

ب. هل $\circ$ عملية تجميعية ؟

ج. هل $\circ$ عملية تبديلية ؟

د. لأي من قيم K تكون $\circ$ عملية ثنائية على Z ؟

١,٢ الزمر

رأينا امثلة عديدة على مجموعات تعرف عليها عملية ثنائية هي على الاقل تجميعية وقد تكون ايضاً تبديلية . فعلى المجموعات : R المكونة من الاعداد الحقيقية ، Q المكونة من الاعداد النسبية ، و Z المكونة من الاعداد الصحيحة تكون العملية الثنائية للجمع تجميعية وفيها عنصر صفري ونظائر جمع (اي الاعداد $-P$ حيث ان $P + (-P) = 0$) .

وسنناقش هذه الخصائص اولا تجريبياً في التعريف التالي ، وفيما بعد خلال امثلة ودراسة اعمق.

١٣. تعريف :

الزمرة $(S, \circ)$ هي مجموعة S معرف عليها عملية ثنائية تحقق الفرضيات التالية :

٢. العملية تجميعية : لكل $P, Q, R \in S$.

$$(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$$

ب. فيها عنصر محايد : اي عنصر $e \in S$ بحيث ان

$$و ه = ٢ ه = ٢ و = ٢ لكل ٢ \ni$$

ح . فيها نظائر : فلكل ٢ \ni هناك عنصر ٢ \ni حيث ان :

$$و ه = ٢ ه = ٢ و$$

يسمى العنصر ٢ نظير العنصر ٢ .

لاحظ ان هناك اربعة شروط يجب توافرها في اي نظام (س، ه) حتى يكون زمرة .
ونعطي هنا هذه الشروط كقائمة اختبار لاي مجموعة س فيها ارتباط (٢، ٢) ه ٢ معرفة على
س \ni س \ni

قائمة اختبار لبنية الزمرة

١. هل الارتباط عملية ثنائية على س ؟

وبشكل خاص هل س مغلقة بالنسبة الى ه ، اي هل ه ينتمي الى

س لكل ٢ ، ب \ni س ؟

واحيانا لا يكون الارتباط ه اقتراناً معرفاً تعريفاً جيداً . وفي تلك الحالة من الضروري ان

نتحقق ايضاً من ان عنصراً واحداً بالضبط من س يعين للزوج (٢، ٢) مهما يكن العنصران

٢، ٢ .

ب. هل العملية تجميعية ؟ هل ه (ب ه) = (ه ب) ه

لكل ٢، ٢، ب \ni س

ح . هل يوجد عنصر محايد ؟ لاثبات هذا فانه من الضروري ايجاد عنصر واحد و \ni حيث
ان

$$و ه = ٢ ه = ٢ و = ٢ لكل ٢ \ni إنه لا يكفي أن نبين أن$$

$$و ه = ٢ ه = ٢ و = ٢ لعنصر واحد معين في س .$$

د. هل لكل عنصر في س نظير ؟ يجب برهان هذا فقط بعد ايجاد العنصر المحايد للمجموعة

س ولعمل ذلك اختر اي عنصر ٢ \ni وبين بعد ذلك انه يوجد عنصر ٢ \ni حيث ان

$$و ه = ٢ ه = ٢ و .$$

ناقشنا في البند ١،١ عمليات الجمع ، والضرب ، والطرح على Z ، R فلنختبر الآن

هل الانظمة الناتجة زمرة ام لا ؟

١. مسألة :

اي من النظم التالية زمرة . أعط اسباب اجاباتك . ولا تحاول ان تبرهن خصائص Z ، Q ،

R بالنسبة للجمع والضرب . وحيثما أمكن استعمل الخصائص من الملحق ٣ .

٢. $(+, Z)$
 ب. $(+, Q)$
 ح. $(+, R)$
 د. $(0, Z)$ حيث ترمز الى عملية الضرب
 هـ. $(0, Q)$
 و. $(0, {}^+R)$ حيث $\{s : s \in R, s < 0\} = {}^+R$
 ر. $(-, Z)$ حيث - ترمز الى عملية الطرح
 ح. $(-, \{0\}, /)$ حيث / ترمز الى عملية القسمة.

رأينا ان بعض العمليات الثنائية تبديلية . اذا كان لزمرة ما عملية ثنائية تبديلية ،
 تعطى الزمرة اسماً خاصاً ، كما يلي :

تعريف :

تسمى الزمرة $(S, \circ)$ تبديلية أو ابيلية اذا وفقط اذا كانت العملية $\circ$ تبديلية (اي
 ان ، $a \circ b = b \circ a$ لكل $a, b \in S$)

مسألة :

اي من الزمر في المسألة ١٤ زمر تبديلية ؟ علل اجاباتك .

مسألة :

لتكن $M(R)$ المجموعة المكونة من جميع المصفوفات 2×2 مع الجمع المعطى في
 التعريف ٨.

اثبت او انقض ان $(M(R), +)$ هي زمرة .
 هل هي تبديلية ؟ (انظر المسألة ٩).

مسألة :

أجب عن الاسئلة التالية باستعمال التعريف ١٠ للضرب في $M(R)$

١. هل هناك عنصر محايد للضرب في $M(R)$ ؟ اذا كان ذلك فما هو ؟
 ب. تحت اي الشروط يكون للمصفوفة نظير ضرب ؟ للأجابة على هذا السؤال اوجد النظير
 الضربي للمصفوفة :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(اذا وجد) واكمل الجمل التالية :

يكون للمصفوفة

$$\begin{pmatrix} ٢ & ب \\ د & ح \end{pmatrix}$$

نظير ضربى اذا فقط اذا كان

واذا كانت س = $\begin{pmatrix} ٢ & ب \\ د & ح \end{pmatrix}$ فأن النظير الضربى يرمز له بالرمز

..... هو المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & ب \\ د & ح \end{pmatrix}^{-١}$ او $س^{-١}$

(ان الرمز Δ يعني ان هناك ارشاداً لحل المسألة . وتجد ارشادات المسائل في اخر صفحات الكتاب).

تعريف :

تسمى المصفوفة التي لها نظير ضربى مصفوفة غير منفردة . واذا لم يكن لها نظير ضربى تسمى مصفوفة منفردة.

وباستعمال المسألة ١٨ نجد ان المصفوفة

$$\begin{pmatrix} ٢ & ب \\ د & ح \end{pmatrix}$$

تكون غير منفردة اذا فقط اذا تحقق الشرط
مسألة :

هل $(م, R)$ ، زمرة ؟ وضح

اترك برهان العرضية التالية للتمرين ٤.

عرضية :

لتكن ل ترمز الى المجموعة المكونة من كل المصفوفات غير المنفردة ٢×٢ فتكون (ل ، $\cdot$) زمرة غير تبديلية.

رأينا في البند ١٠،١ ان العملية الثنائية يمكن تعريفها بواسطة جدول . استعمل نتائج المسألة ١٢ لحل المسألة التالية :

مسألة :

لتكن $س = \{٢, ب, ح, د\}$. عرف عملية ثنائية $\circ$ على $س$ بواسطة الجدول ١,٥

٢. على فرض ان العملية تجميعية ، بين هل $(س, \circ)$ زمرة ام لا؟

ب. هل (س، ٥) زمرة تبديلية ؟

٥	٢	ب	ح	د
٢	٢	ب	ح	د
ب	ب	ح	د	٢
ح	ح	د	٢	ب
د	د	٢	ب	ح

الجدول ١,٥

مسألة :

لخص نتائجك . اعمل قائمة تشمل كل نظام ناقشناه في هذا البند واذكر اذا كان زمرة ام لا . واي من هذه الزمر غير تبديلية ؟
تمارين ١ : بين اي المجموعات الجزئية التالية من R زمر بالنسبة لعملية الجمع العادية للاعداد. علل استنتاجك . (قد يساعد كتابة بضع عناصر لكل مجموعة).

وكذلك انظر الى التمرين ١ ، ٢-١ .

٢. ${}^+Z$ مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة

ب. $\{Z \ni n : n^2\}$ مجموعة الاعداد الصحيحة الزوجية : Z^2

ح. $\{Z \ni n : n^2 + 1\}$ مجموعة الاعداد الصحيحة الفردية : $\{Z \ni n : n^2 + 1\}$

د. $\{Z \ni n : n^2 \pm 1\}$

هـ. $\{0\} \cup \{n^2 \pm 1 : n \in Z\}$

بين اي المجموعات التالية زمر بالنسبة لعملية الضرب العادية على الاعداد . علل استنتاجك .

٢. ${}^*Q - \{0\}$

ب. ${}^*Q = \{s : s \in Q \text{ و } s < 0\}$

ح. ${}^-Q = \{s : s \in Q \text{ و } s > 0\}$

د. $\{Z \ni n : n^2 \pm 1\}$

هـ. $\{Z \ni n : n^2\}$

و. R

ز. ${}^*R - \{0\}$

ح. ${}^-R = \{s : s \in R \text{ و } s > 0\}$

٣. ١. هل مجموعة الاعداد غير النسبية زمرة بالنسبة الى الجمع ؟ اوضح

ب. هل مجموعة الاعداد غير النسبية زمرة بالنسبة لعملية الضرب ؟ علل اجابتك .
برهن ان المجموعة ل المكونة من المصفوفات 2×2 غير المنفردة زمرة غير تبديلية بالنسبة الى ضرب المصفوفات . قد يفيدك استخدام رموز المحددات :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{مصفوفة س}$$

تكون محددة س ، وتختصر الى مح س ، هي $a \cdot d - b \cdot c$. المسألة ١٨ ب تؤكد ان المصفوفة س غير منفردة اذا وفقط اذا كانت مح س $\neq 0$.
(يشير الرمز • الى وجود ارشاد للتمرين . ارشادات التمارين مكانها في آخر الكتاب).
*٥.

لتكن $Q = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ فتكون Q مجموعة جزئية من R ستحتاج في المسائل التالية الى استعمال هذه الحقيقة والى ان $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي :

١. اثبت ان $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ حيث $a, b, c, d \in Q$ اذا وفقط اذا كان $a = c$ و $b = d$.

ب. بما ان $Q = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هي مجموعة جزئية من R فيمكن تعريف الجمع على عناصر Q $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$. هل جمع الاعداد عملية ثنائية على Q ؟
ج. اثبت او انف ان $(Q, +)$ تكون زمرة .

*٦. اثبت انه اذا كانت $\cdot$ ترمز الى الضرب العادي للاعداد الحقيقية فانه لكل

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae & bf \\ cg & dh \end{bmatrix}$$

تأكد من اثبات ان الفراغات مملوءة باعداد نسبية .

ب. أثبت او انف ان $(Q, \cdot)$ هي زمرة .

٧. لتكن $S = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in Z, q \neq 0 \right\}$ فتكون S مجموعة جزئية من Q وتكون العمليات العادية للجمع والضرب معرفة على S .
٢. أثبت او انف ان $(S, +)$ زمرة .

ب. اثبت او انف ان (س، {، ٠} زمرة .

٨. لتكن س = $\left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ حيث ب عدد اولي ثابت.

٢. اثبت او انف ان (س، +) زمرة .

ب. أثبت او انف ان (س، {، ٠} زمرة .

٩. لتكن س = {أ، ب، ج، د} ولتكن . عملية ثنائية على س معرفة بالجدول ١،٦ (انظر تمرين ١،١ - ٢)

٥	٢	ب	ج	د
٢	٢	ب	ج	د
ب	ب	٢	د	ج
ج	ج	د	٢	ب
د	د	ج	ب	٢

الجدول ١،٦

٢. على فرض ان العملية تجميعية ، برهن ان (س، ٥) زمرة . تسمى هذه الزمرة بزمرة كلاين الرباعية.

ب. هل العملية تبديلية ؟

١٠. ليكن $R \times R = {}^2R$ هو المستوى الديكارتي العادي . في التمرين ١،١ - ٤ قد عرفت عملية ثنائية بوضع

$$({}^2R, +) = (R, +) \quad \text{لكل } (a, b), (c, d) \in ({}^2R, +)$$

فهل $({}^2R, +)$ زمرة ؟ علل اجابتك . يمكنك استعمال اجابات تمرين ١،١ - ٤.

١،٣ الخصائص الأولية للزمر

رأينا في بند ١،٢ عدة امثلة على الزمر ، وفي هذا البند سنثبت عدداً من الخصائص الأولية التي تكون صحيحة في اي زمرة (س، ٥) وبعد برهنة هذه الخصائص في زمرة اختيارية يمكن استخدامها لأي زمرة معينة . وهكذا يعطي هذا البند بعض خصائص الجبر المجرد فعند برهان اي نظرية في اي نظام يمكن استعمالها لاي حالة خاصة من هذا النظام .

في هذا البند قد تحتاج الى استعمال النتيجة التالية لتعريف العملية الثنائية :

عرضية :

إذا كانت $(\emptyset, \emptyset)$ زمرة وكانت $\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset$ حيث $\emptyset = \emptyset$ وكذلك

$$\emptyset = \emptyset \text{ فان } \emptyset = \emptyset$$

ان برهان العرضية ٢٤ ينتج مباشرة من تعريف العملية الثنائية $\emptyset$ على $\emptyset$ وبالنسبة لهذه العملية تكون $\emptyset$ صورة $(\emptyset, \emptyset)$ وكذلك $\emptyset$ صورة $(\emptyset, \emptyset)$. وبما ان $\emptyset = \emptyset$ ، $\emptyset = \emptyset$ فتكون $(\emptyset, \emptyset) = (\emptyset, \emptyset)$. (لماذا ؟) . ومن ثم فان الصورتين $\emptyset$ و $\emptyset$ تكونان متساويتين. (لماذا ؟)

مسألة :

لتكن $(\emptyset, \emptyset)$ زمرة . برهن العريضات التالية :

اكتب كل برهان بدقة مع العناية الخاصة بالاقواس وحيثما امكن استعمال النتائج

السابقة لبرهنة العبارات اللاحقة.

٢. قانون الاختزال الايمن. اذا كانت $\emptyset, \emptyset, \emptyset$ وكان $\emptyset = \emptyset$ كان $\emptyset = \emptyset$

ب. قانون الاختزال الايسر اذا كانت $\emptyset, \emptyset, \emptyset$ وكان $\emptyset = \emptyset$ كان $\emptyset = \emptyset$ (لماذا يكون ضرورياً ذكر قوانين الاختزال ؟)

ج. للزمرة $(\emptyset, \emptyset)$ عنصر محايد واحد فقط

د. اذا كان $\emptyset$ فللعنصر $\emptyset$ نظير واحد فقط في $\emptyset$.

هـ. لكل $\emptyset$ ، $(\emptyset) = \emptyset$.

و. لكل $\emptyset, \emptyset$ ، $(\emptyset) = \emptyset$ (تأكد من اجابتك بايجاد مركبة $\emptyset$ والنظير المقترح.)

ز. لكل $\emptyset, \emptyset$ يوجد عنصر واحد فقط $\emptyset$ حيث ان $\emptyset = \emptyset$ ،

فالعنصر $\emptyset = \emptyset$.

ح. لكل $\emptyset, \emptyset$ هناك عنصر واحد فقط $\emptyset$ حيث ان $\emptyset = \emptyset$ ،

فالعنصر $\emptyset = \emptyset$.

مسألة :

يمكن اعادة كتابة العرضية ز في المسألة ٢٥ كالآتي :

لكل $\emptyset, \emptyset$ يكون للمعادلة $\emptyset = \emptyset$ ب حل واحد فقط هو

$\emptyset = \emptyset$. اعد كتابة العرضية ح بهذه الطريقة.

رأينا امثلة عديدة على الزمر مثل $(\emptyset, \emptyset)$ ، $(\emptyset, \emptyset)$ ، $(\emptyset, \emptyset)$ و $(\emptyset, \emptyset)$ حيث تدعى

العملية عملية ضرب ويرمز لها بالرمز . أو بوضع العنصرين احدهما بعد الآخر . وكل زمرة مثل

هذه تسمى زمرة ضرب . وفي اي زمرة ضرب يكتب العنصر المحايد 1 ويرمز للنظير $\emptyset$ للعنصر $\emptyset$

بالرمز ٣٢ وراينا كذلك عدة امثلة على زمر مثل $(+,Q)$ ، $(+,R)$ ، و $(\cdot, R)$ حيث تدعى العملية عملية جمع ويرمز لها بالرمز $+$. تدعى مثل هذه الزمرة بزمرة الجمع ، ويكتب العنصر المحايد في زمرة الجمع e ويسمى العنصر الصفري ، ويرمز للنظير P بالرمز $-P$.

ويشعر العاملون بالجبر بعدم الارتياح عند استعمال الرمز $+$ لعملية غير تبديلية ولهذا سنتبنى الاصطلاح على ان الرمز $+$ يستعمل فقط اذا كانت العملية تبديلية . لاحظ ، ان $+$ قد تستعمل لعمليات ثنائية ليست شبيهة بعملية الجمع العادية على Q, Z ، أو R ، وان بعض العمليات التبديلية يرمز لها برموز غير $+$

مسألة :

استعمل الرموز التي اصطلحنا عليها اعلاه لترجمة نتائج الفرضيتين زح من المسألة ٢٥

كما يلي :

١. اذا كانت $(S, \cdot)$ زمرة ضرب فاكتب الحل للمعادلة $S \cdot P = B$ وبعد ذلك اكتب الحل للمعادلة $P \cdot B = S$.

هل من الضروري ان يتساوى الحلان S, B ؟

ب. في زمرة الجمع (ومن ثم التبديلية) $(S, +)$ اكتب الحل للمعادلة

$S + P = B$ وللمعادلة $P + B = S$ هل $S = B$ ؟

تبين النظريتان ٢٨ و ٢٩ التاليتان ان مسلمات الزمرة يمكن التعبير عنها بعدة طرق متكافئة. برهان هاتين النظريتين صعب . فتركهما للتمرينين ٧ و ٨.

نظرية :

لتكن S مجموعة عرفت عليها عملية ثنائية $\circ$ تحقق الشروط التالية :

١. العملية $\circ$ تجميعية.

ب. يوجد عنصر $e \in S$ يسمى عنصراً محايداً ايمن حيث ان

$$P \cdot e = P \text{ لكل } P \in S$$

جـ لكل $P \in S$ يوجد عنصر $P^{-1} \in S$ بحيث ان $P \cdot P^{-1} = e$ و

يسمى العنصر P^{-1} نظير P الايمن.

اذا تحقق كل ذلك تكون $(S, \cdot)$ زمرة .

وبالطبع هناك نظرية مشابهة تتعلق بالعنصر المحايد الأيسر والنظير الأيسر.

نظرية :

لتكن S مجموعة عرفت عليها عملية ثنائية $\circ$ تحقق الشروط التالية :

١. العملية $\circ$ تجميعية

ب. لكل $P, B \in S$ للمعادلة $P \cdot B = S$ حل $S \cdot P = S$

حـ لكل $a, b \in S$ للمعادلة $a^2 = b$ حل $a \in S$.
 فاذا تم ذلك تكون $(S, \circ)$ زمرة .

تمارين :

$$\text{لتكن } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

حل كلا من المعادلات $S^2 = B, a^2 = b$ في زمرة المصفوفات 2×2 غير المنفردة . اجعل
 حـك باستعمال صيغة معكوس المصفوفة . هل يكون $S = S$ ؟

$$2. \text{ في } M_2(R) \text{ لتكن } P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ و } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

حل المعادلا التالية :

$$P \quad S^2 = B$$

$$B. \quad a^2 = b$$

$$حـ \quad C = (a+b) + b.$$

$$3. \text{ لتكن } P = 2 \text{ و } B = 2 \text{ و } B = 2 \text{ و } B = 2$$

$$\text{حل المعادلة } S^2 = B \text{ في الزمرة } (Q, \cdot) - \{0\}$$

(انظر التمرين ١,٢ - ٠٦)

٤. هل يوجد في زمرة $(S, \circ)$ عناصر S حيث

$$S^2 = S \text{ ؟ ما هي ؟ علل اجاباتك.}$$

٥. * برهن ان الزمرة $(S, \circ)$ تبديلية اذا وفقط اذا كان $(S, \circ) = (S, \circ) = (S, \circ)$

$$(B^2) \text{ لكل } a, b \in S.$$

(في زمرة الضرب $(S, \circ)$ ينص الشرط على ان مربع حاصل الضرب هو حاصل ضرب
 المربعات :

$$(a^2) = a^2 \text{ حيث } a^2 = a^2, \text{ حسب التعريف.}$$

٦. * برهن انه اذا كانت $(S, \circ)$ زمرة وكان $S^2 = S$ و لكل $a \in S$ تكون $(S, \circ)$ زمرة

تبديلية . هل العكس صحيح ؟ لماذا ؟ ●

٧. للتحدي . برهن النظرية ٢٨ . كي تبرهن ذلك افرض ان $(S, \circ)$ مجموعة معرف عليها

عملية ثنائية تجميعية يتوافر فيها ما يلي :

$$(١) \text{ فيها عنصر محايد ايمن و } a^2 = a \text{ لكل } a \in S$$

(٢) لكل عنصر $a \in S$ يوجد نظير ايمن a' يحقق $aa' = e$ و.

برهن ان $(S, \circ)$ زمرة باستخدام الخطوات التالية :

٢. برهن ان قانون الاختزال الايمن يتحقق في S .

ب. برهن ان العنصر المحايد الايمن هو في الحقيقة عنصر محايد.

(برهن ان $e = a = a'$ و $aa' = e$).

ح. برهن ان اي نظير ايمن هو في الحقيقة نظير.

(اثبت ان $a' = e = a'$ و $aa' = e$).

٨. للتحدي . برهن النظرية ٢٩ . لبرهنة ذلك افرض ان S مجموعة معرف عليها عملية

ثنائية تجميعية حيث انه لكل $a, b \in S$ هنالك $s, t \in S$ يحققان $s = a$ و $t = b$ و

$s = t$

٢. اثبت $b \in S$. وبين انه يوجد $c \in S$ حيث ان $cb = e$ و $b = e$.

وبعد ذلك بين ان e عنصر محايد ايمن للمجموعة S . (بين ان $e = a$ و $a = e$ لكل $a \in S$)

$(S, \circ)$

ب. بين ان $(S, \circ)$ زمرة. لعمل ذلك بين ان $(S, \circ)$ تحقق فرضيات للنظرية ٢٨ ومن ثم

تحقق نتائجها.

١,٤ عملية ثنائية على مجموعات من الاقترانات

رأينا امثلة على مجموعات عملياتها الثنائية من نوع الجمع او الضرب . الا ان هناك عمليات ثنائية أخرى اقل استعمالاً في الزمر منها تركيب الاقترانات ، وهي عملية درستها سابقاً في حساب التفاضل والتكامل . ولكن قبل ان ننشئ زمراً جديدة معرّفاً عليها عملية التركيب ، تستعرض بعض خصائص الاقترانات وندعوك لمراجعة تعريف الاقتران والامثلة على الاقترانات وغير الاقترانات الواردة في البند ١,١.

تعريف :

يكون الاقتران $\sim$: $a \sim b$ و $c \sim d$: $a \sim b$ متساويين اذا وفقط اذا كان

$c = d$ (س) ل (س) لكل $s \in S$.

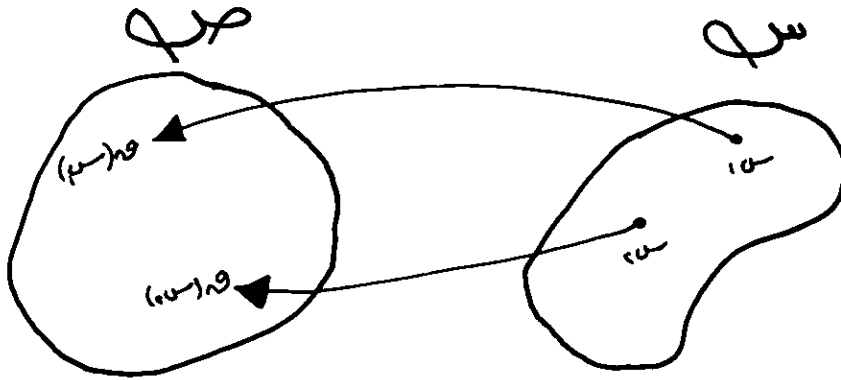
لاحظ ان التعريف ٣٠ ينص على ان الاقترانات المتساوية يجب ان يكون لها نفس المجال ونفس القيم.

ان ما يهمنا هو صنف خاص من الاقترانات هي تلك التي لا يمكن ان تقرن عنصرين

او اكثر من المجال بعنصر واحد في المدى وتلك التي قيمها تشمل كل المدى . ومعظم هذا البند والبند ١,٥ مكرسة لدراسة اقترانات بأحدى هاتين الخاصتين أو كليهما.

تعريف :

يكون الاقتران $و: س$: $س \leftarrow ص$ واحداً لواحد تباينياً اذا وفقط اذا تحقق الشرط التالي :
لكل $س$ ، $س \rightarrow س$ ، اذا كانت $س \neq س$ فان $و(س) \neq و(س)$
وبالكلمات : يكون $و: س$: $س \leftarrow ص$ اقتران واحد لواحد اذا وفقط اذا كان لأي عنصرين مختلفين في $س$ صورتان مختلفان في $ص$ بالنسبة الى $و$. (انظر الشكل ١,٢).



الشكل ١,٢

مسألة :

لكل من الاقترانات التالية قاعدة يعينها جدول من القيم :

$و: س$: $س \leftarrow ص$ (الجدول ١,٧) ، $هـ: ص$: $ص \leftarrow س$
(الجدول ١,٨) ، $ل: ص$: $ص \leftarrow س$ (الجدول ١,٩) و $ك: س$: $س \leftarrow س$
(الجدول ١,١٠) . عين منها ما هو اقتران واحد لواحد ولتكن
 $ص = \{١, ٢, ٣, ٤, ٥\}$ و $س = \{١, ٢, ٣, ٤, ٥\}$.

هـ : ص	
ص	هـ (ص)
١	٢
٢	٤
٣	١
٤	٣

الجدول ١,٨

و: س	
س	و(س)
١	٤
٢	٣
٣	١
٤	٢
٥	٣

الجدول ١,٧

ك : س ← ص	
٥	١
٣	٢
١	٣
٢	٤
١	٥

الجدول ١,١٠

ل : ص ← س	
٥	١
٣	٢
٢	٣
١	٤

الجدول ١,٩

من المفيد أحياناً ان نعمل بصيغة أخرى لتعريف اقتران الواحد لواحد مكافئة للتعريف السابق وهي : يكون الاقتران $ق : س ← ص$: $ق = س$ (س) لكل $س$ ، $س ← ق$ اذا كانت $ق = س$ (س) $ق = س$ (س) فان

(استعمل نتائج المنطق المعطاة في الملحق ٢ لكتابة الصيغة المكافئة لهذا التعريف.

وكي تستعمل الشرط الاثبات ان اقتراناً ما واحد لواحد افترض

$ق = س$ (س) $ق = س$ (س) وبرهن ان $ق = س$ (س) .

سنحتاج أحياناً ايضاً النفي لتعريف اقتران واحد لواحد.

ب. يكون الاقتران $ق$ ليس واحداً لواحد اذا فقط اذا

تعريف :

يكون الاقتران $ق : س ← ص$ شاملاً اذا فقط اذا كان لكل $ص ← ق$ يوجد $س ← ق$ بحيث ان

$ق = س$ (س) ، عندها نقول ان الاقتران يعكس كل $س$ على كل $ص$

ولبرهنة ان اقتراناً ما $ق$ شامل ، نبداً بعنصر اختياري $ص ← ق$ ونبرهن على وجود عنصر $س ← ق$

$ق = س$ (س) بحيث $ق = س$ (س) .

ومن الممكن أحياناً التعبير عن $س$ بدلالة $ص$.

مسألة :

عين هل اي من الاقترانات في المسألة ٣٢ شاملاً ام لا ؟

تعريف :

لتكن $ق : س ← ص$ اقتراناً من $س$ الى $ص$ ، تسمى المجموعة

$ق = س$ (س) = $ق$ (س) صورة $س$ بالنسبة الى $ق$ او مجموعة صورها.

مسألة :

عرف $ق : س ← ص$ بالتعريف $ق = س$ (س) = $ق$ (س)

لكل $س ← ق$. عين عناصر مجموعة الصور $ق$ (س) . هل مجموعة الصور $ق$ (س) تساوي المدى $ق$ ؟

هل ق شاملة ؟

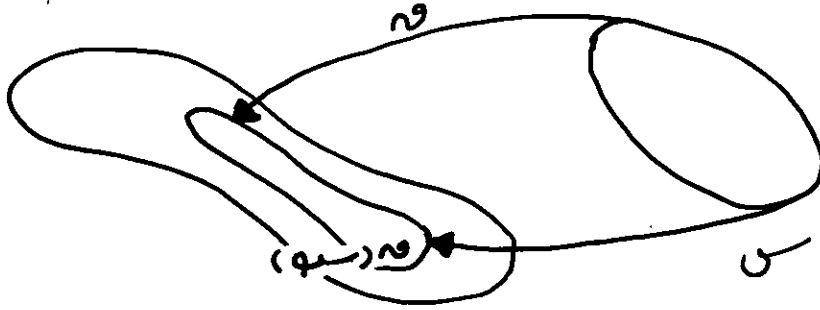
اترك برهان العرضية التالية للتمرين ٦ .

عرضية :

يكون الاقتتران $\sim$: $s \sim s$ شاملاً اذا وفقط اذا كانت $s = s$ وبالكلمات ، يكون الاقتتران $\sim$ شاملاً اذا وفقط اذا كانت مجموعة صور المجال تساوي المدى .

وقد ترغب احياناً في استعمال النفي لتعريف الاقتتران الشامل (انظر الشكل ١,٢).

ح يكون الاقتتران $\sim$: $s \sim s$ غير شامل اذا وفقط اذا كان _____ .



الشكل ١,٢

مسألة :

المجال والمدى لكل من الاقتترانات التالية مجموعات جزئية من R ابحث هل اي من هذه الاقتترانات واحد لواحد و/او شامل . كي تعلق اجاباتك قد ترغب في رسم مخططات هذه الاقتترانات .

١. $R \leftarrow R$ معطاة بالمعادلة $\sim (s) = s^2$

ب. $\sim : \{s : s \leq 0\} \leftarrow \{s : s \leq 1\}$ معطاة بالمعادلة $\sim (s) = s^2$

ح ل : $R \leftarrow R$ معطاه بالمعادلة ل $(s) = s^2 + b$ حيث b عنصران ثابتان في R و $b \neq 0$.

اذا كان $\sim : s \sim s$ و $\sim : s \sim s$ هـ : $\sim : s \sim s$ عـ اقتترانين فانه لكل $s \in S$ ، يكون $\sim (s) \in S$ فيكون هـ $(\sim (s))$ معرّفًا.

ونعطي التناظر $s \sim s$ هـ $(\sim (s))$ من s الى $\sim (s)$ اسماً خاصاً كما يلي :

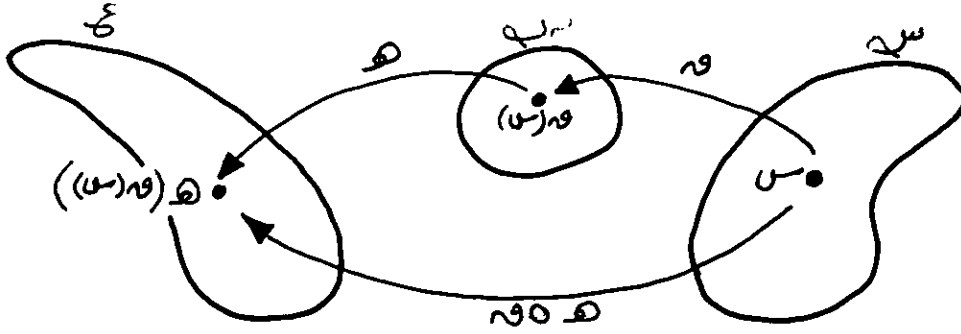
تعريف :

اذا كان $\sim : s \sim s$ و $\sim : s \sim s$ هـ : $\sim : s \sim s$ عـ اقتترانين فان الاقتتران المركب هـ : $\sim : s \sim s$ عـ يعرف

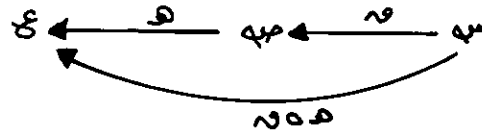
كالاتي : لكل $s \in S$

$(\sim (s)) = h = h(\sim (s))$

الاقتزان المركب هـ و م مبین بالشکلین ١,٤ و ١,٥



الشکل ١,٤



الشکل ١,٥

مسألة :

لتكن و: سـ ← صـ ، هـ : صـ ← صـ ، ل : صـ ← سـ هي اقترانات المسألة
٣٢ . اعمل جدول القيم للاقتزانين المركبين
هـ و: سـ ← صـ ل هـ : صـ ← سـ .

تعريف :

لاي مجموعة غير خالية سـ ، لتكن م (سـ) المجموعة المكونة من جميع الاقترانات الواحد لواحد
الشاملة من سـ الى نفسها. لاحظ ان الاقتران وـ يكون في م (سـ) اذا وفقط اذا كان وـ
اقتران واحد لواحد وشاملا من سـ الى سـ .

مسألة :

٢. لتكن سـ = {١,٢,٣} بين اي الاقترانات المعرفة في الجداول ١,١١ الى ١,١٤ تكون عناصر
في م (سـ)

سـ	هـ (سـ)
١	٣
٢	٢
٣	٢

الجدول ١,١٢

سـ	و (سـ)
١	٣
٢	١
٣	٢

الجدول ١,١١

س	ك (س)
١	٢
٢	١
٣	٣

الجدول ١,١٤

س	ل (س)
١	٢
٢	٤
٣	١

الجدول ١,١٣

ب. لتكن $R = \{s, l, k\}$ ، ولتكن R ، و R ، ه هي الاقترانات المذكورة في المسألة ٢٨ . بين اي من هذه الاقترانات عنصر في $M(R)$.

ان النتيجة الرئيسية التي يراد تكوينها في البندين ١,٤ و ١,٥ هي انه في كل مجموعة غير خالية S تكون المجموعة $M(S)$ زمرة ، بالنسبة لعمليات تركيب الاقترانات . وتبرهن هذه النتيجة بمتسلسلة من التمهيدات التي تنطبق على عناصر $M(S)$ وعلى انواع اخرى من الاقترانات فالتمهيدتان التاليتان تفيدان في البرهنة على ان تركيب الاقترانات هو عملية ثنائية على $M(S)$.

مسألة :

اثبت التمهيدية التالية :

تمهيدية :

ليكن $R : S \rightarrow S$ ، ه : $S \rightarrow S$ ، ع اقتراني واحد لواحد فيكون الاقتران المركب $h \circ e : S \rightarrow S$ ع واحداً لواحد ايضاً .

مسألة :

اثبت التمهيدية التالية :

تمهيدية :

اذا كان $R : S \rightarrow S$ ، ه : $S \rightarrow S$ ، ع اقترانين شاملين فيهما R يعكس S على S ، ه يعكس S على S ، فان : $h \circ e : S \rightarrow S$ ع شامل يعكس S على S .

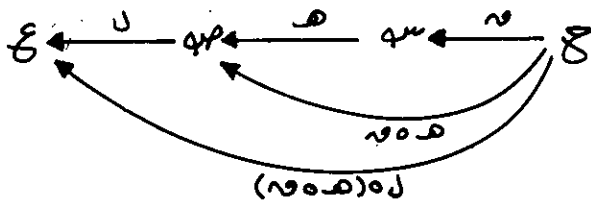
مسألة :

برهن ان التركيب عملية ثنائية على $M(S)$.

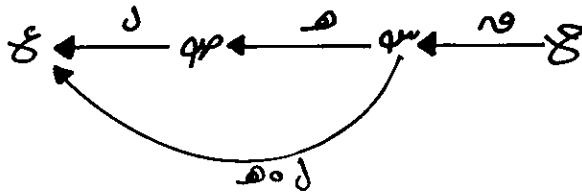
لتكن $R : S \rightarrow S$ ، ه : $S \rightarrow S$ ، ل : $S \rightarrow S$ ع اقترانات .

هناك طريقتان طبيعيتان لتكوين اقتران مركب من R الى L كما هو مبين في الشكلين ١٦ و ١,٧.

اكمل الشكل ١,٧ بالاسهم والاحرف المناسبة.



الشكل ١,٦



الشكل ١,٧

مسألة :

اثبت التمهيدية التالية :

تمهيدية :

القانون التجميعي لتركيب الاقترانات. لتكن

$$\begin{aligned} & \text{و: } \leftarrow \text{ح} \leftarrow \text{س}, \text{ ه} : \text{س} \leftarrow \text{ه} \\ & \text{ل : } \text{ه} \leftarrow \text{ع} \text{ اقترانان. فتكون ل ه } (\text{ه ه}) = (\text{ل ه ه}) \text{ و.} \end{aligned}$$

نتيجة :

ان تركيب الاقترانات هو عملية ثنائية تجميعية على المجموعة م (س) المكونة من كل الاقترانات المتباينة والشاملة من س الى نفسها .
في البند ١,٥ سنبرهن على ان م (س) تكون فعلا زمرة بالنسبة الى عملية تركيب الاقترانات .

تمارين :

١. في كل من الاقترانات التالية اعتبر المجال والمدى مجموعة جزئية من R. بين فيما اذا كان اي من هذه الاقترانات واحداً لواحد و / أو شاملاً.

$$\begin{aligned} & \text{٢. و: } R - \{0\} \leftarrow R \text{ معطاة بالمعادلة } \text{و} (س) = \frac{1}{س} \\ & \text{ب. و: } \{س : س < 0\} \leftarrow \{س : س < 0\} \text{ معطاة بالمعادلة } \text{و} (س) = \frac{1}{س} \end{aligned}$$

$$\text{حـ هـ : } \{ \text{س} : \text{س} > \} \leftarrow \{ \text{س} : \text{س} < \} \text{ معطاة بالمعادلة هـ (س) } = \frac{\text{س}}{\text{س}-1}$$

٢. لتكن و : س هـ : ص هـ - ص ، ل : ص هـ . هي الاقترانات المعطاة في المسألة ٣٢

استعمل جداول المسألتين ٣٢ ، ٤٠ لحساب

$$[\text{ل هـ}] \text{ و } [\text{ل هـ}] \text{ (س) لكل } \text{س} \text{ هـ} .$$

٣.٢. لتكن و : { س : س < } ← { س : س < } معطاة بالمعادلة و (س) = $\frac{1}{\text{س}}$. اوجد و هـ و

ب. لتكن س هـ = { س : س > } و ص = { س : س < } عرف اقترانات هـ : س هـ و ل : ص هـ باعتبار

$$\text{هـ (س) } = \frac{\text{س}}{\text{س}-1} \text{ حيث } \text{س} > 1$$

$$\text{و ل (ص) } = \frac{\text{ص}}{\text{ص}+1} \text{ حيث } \text{ص} > 0$$

اوجد هـ (ل) (س) ، ل هـ (س) و ل هـ (س) حيث

س > 1 و و هو الاقتران المعرف في الفرع ٢ .

٤. عرف و : ر < ر و هـ : ر < ر بالمعادلتين

$$\text{و (س) } = \text{س}^2 \text{ و هـ (س) } = \text{س}^2 + 1 \text{ لكل } \text{س} \in \mathbb{R} .$$

حيث ٢ ، ب < ر ثابتان ، ٢ ≠ ٠

عرف ل : ر - { ٠ } ← ر بالمعادلة ل (س) = $\frac{1}{\text{س}}$ لكل س < ر - { ٠ } تحقق بالحساب ان و

$$\text{هـ (هـ ل) (س) } = [\text{ل هـ}] \text{ (س)}$$

$$\text{لكل } \text{س} \in \mathbb{R} - \{ 0 \} .$$

هـ لتكن $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ فتكون $\mathbb{R}^2$ زمرة تبديلية بالنسبة لعملية الجمع المعرفة بما يلي :

$$(\text{ب} , \text{ا}) + (\text{د} , \text{ح}) = (\text{ب} + \text{د} , \text{ا} + \text{ح}) \text{ لكل } (\text{ب} , \text{ا}) , (\text{د} , \text{ح}) \in \mathbb{R}^2$$

(انظر التمرين ١,٢ - ١٠)

٢. لتكن و : ر < ر ، هـ : ر < ر معرفتين بوضع

$$\text{و (س,ص) } = (\text{ا} \text{س} + \text{ب} \text{ص} , \text{ح} \text{س} + \text{د} \text{ص})$$

$$\text{هـ (س,ص) } = (\text{ا} \text{س} + \text{ب} \text{ص} , \text{ح} \text{س} + \text{د} \text{ص})$$

حيث ٢ ، ب ، د ، ا ، ب ، ح ، د < ر

اوجد و هـ (س,ص)

ب. لكل اقتران $\mathcal{R}$: $\mathcal{R} \leftarrow \mathcal{R}$ معرف كما في $\mathcal{P}$ عينا مصفوفة

$$\begin{pmatrix} \mathcal{P} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix} = \mathcal{M}$$

وهكذا فالمصفوفة :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{P} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix} \ni \mathcal{M} (R) \text{ تعين الاقتران}$$

و : $\mathcal{R} \leftarrow \mathcal{R}$ اذا فقط اذا كان

و : $(\mathcal{S}, \mathcal{V}) = (\mathcal{P} + \mathcal{B}, \mathcal{C} + \mathcal{D})$.

ليكن $\mathcal{R} \leftarrow \mathcal{R}$ الاقترانين المعرفين في الجزء $\mathcal{P}$

ولتكن $\mathcal{M}$ ، $\mathcal{M}$ المصفوفتين المناظرتين . اوجد المصفوفة $\mathcal{M}$ التي تناظر التركيب و $\mathcal{M}$

بين كيف تكون علاقة $\mathcal{M}$ من المصفوفتين $\mathcal{M}$ ، $\mathcal{M}$

ماذا تستطيع ان تقول الان عن الغرض من تعريف المصفوفة ؟

٦. برهن العرضية ٣٧.

٧. ليكن و : $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S}$ و $\mathcal{H} : \mathcal{V} \leftarrow \mathcal{V}$ اقترانين

٨. برهن انه اذا كان $\mathcal{H}$ واحداً لواحد فان $\mathcal{V}$ يكون واحداً لواحد

ب. برهن عكس $\mathcal{P}$ السابق او اعط مثالا مناقضاً للعكس.

ج. اعط مثالا لاقترانين و : $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S}$ و $\mathcal{H} : \mathcal{V} \leftarrow \mathcal{V}$

بحيث يكون $\mathcal{H}$ واحداً لواحد ويكون $\mathcal{H}$ واحداً لواحد.

٨. لتكن و : $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S}$ و $\mathcal{H} : \mathcal{V} \leftarrow \mathcal{V}$ اقترانين

٩. برهن انه اذا كان $\mathcal{H}$ شاملاً فان $\mathcal{H}$ يكون شاملاً.

ب. برهن عكس الجزء السابق او اعط مثالا مناقضاً للعكس.

ج. اعط مثالا لاقترانين و : $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S}$ و $\mathcal{H} : \mathcal{V} \leftarrow \mathcal{V}$

بحيث يكون $\mathcal{H}$ غير شامل ويكون $\mathcal{H}$ شاملاً.

٩. ليكن $\mathcal{N}$ اي عدد صحيح موجب ولتكن

- ج_ن = {1, 2, 3, ..., n} = {r : r ∈ Z, 1 ≤ r ≤ n} .
 ٢. اجب على الاسئلة التالية . ليس المطلوب اعطاء براهين ولكن المطلوب اعطاء مقولات مقبولة .
 أ. لتكن ك > ن هل يوجد اقتران شامل من ج_ن الى ج_ك ؟
 ب. لتكن ك > ن هل يوجد اقتران واحد لواحد من ج_ن الى ج_ك ؟
 ج. هل يوجد اقتران و : ج_ن ← ج_ك بحيث يكون واحداً لواحد ولكن ليس شاملاً ؟
 د. هل يوجد اقتران و : ج_ن ← ج_ك بحيث يكون شاملاً ولكن ليس واحداً لواحد ؟

١,٥ زمر التبديلات

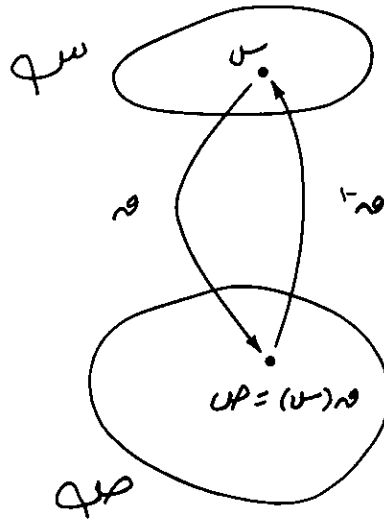
رأينا في البند ١,٤ ان المجموعة م (س_م) المكونة من جميع الاقترانات الواحد لواحد الشاملة من س_م الى نفسها لها عملية ثنائية تجميعية وهي عملية تركيب الاقترانات . فلكي تكون هذه المجموعة زمرة بالنسبة لتلك العملية عندها يجب ان تحتوي على اقتران محايد وكل عنصر في م (س_م) يجب ان يكون له معكوس بالنسبة لعملية التركيب .
مسألة :

لتكن س_م مجموعة غير خالية . اثبت ان للمجموعة م (س_م) عنصراً محايداً اي ان لها اقتراناً وحيث ان و_م م (س_م) وكذلك و_و = و_ق = و_ل لكل ق ∈ م (س_م) . لاثبات ذلك يجب ان تعرف اقتراناً و : س_م ← س_م بحيث ان

(و_و) (س) = (و_و) (س) = و_و (س) لكل س ∈ س_م ، ثم تثبت ان و_م م (س_م) .
 والآن لتكن و_و عنصراً ثابتاً في م (س_م) فاذا كان له معكوس ق_و م (س_م)
 فان و_و ق_و = ق_و و_و = و_و اي ان (و_و ق_و) (س) = (ق_و و_و) (س) = و_و (س) = —————
 لكل س ∈ س_م وبالتحديد فهذا يعني ان ق_و (ق_و س) = (ق_و س) = —————
 لكل س ∈ س_م ومن ثم يجب ان تعيد ق_و العنصر و_و (س) س_م الى العنصر س_و س .
 فليكن و_و : س_م ← س_م اقتران واحد لواحد وشاملاً فانه لاي عنصر معطى ص ∈ س_م يوجد عنصر ما س_و س_م بحيث ان و_و (س) = ص (لماذا؟) فمن الطبيعي ان نعرف ق_و (ص) = س بحيث ان و_و «ترسم المسار رجوعاً» من ص الى س . وبما ان و_و واحد لواحد وشامل فيتبع حالا ان القاعدة و_و المعرفة بهذه الطريقة هي اقتران من س_م الى س_م (انظر الشكل ١,٨) .
تعريف :

اذا كان و_و : س_م ← س_م واحداً لواحد وشاملاً يعرف الاقتران العكسي (المعكوس) ق_و : س_م ← س_م كما يلي :
 لاي ص ∈ س_م يكون ق_و (ص) هو العنصر الوحيد س_و س_م الذي يحقق و_و (س) = ص ولهذا

فان $\bar{v} = (v)$ س اذا وفقط اذا كان $v = (s)$ ص



الشكل ١,٨

مسألة :

أوجد اقتراناً عكسياً لكل من الاقترانات في المسألة ٣٢ التي تكون واحداً لواحد وشاملاً . (لاحظ انه ليس لكل اقتران اقتران عكسي). لقد وجدنا اقتراناً محايداً $\exists (s)$ ، يجب ان نبرهن الآن انه اذا كانت $\exists (s)$ فان الاقتران العكسي $\bar{v}$ الذي عرفناه اعلاه هو حقاً معكوس وعنصر في $\exists (s)$ وهذا هو محتوى التمهيديتين التاليتين .

مسألة :

برهن التمهيدية التالية :

تمهيدية :

اذا كان v اقتران واحد لواحد وشاملاً من s الى v فان $\bar{v} = (s)$ س لكل $s \in s$ و $\bar{v} = (v) = v$ لكل $v \in v$.
اترك برهان التمهيدية التالية للتمرين ٦.

تمهيدية :

اذا كان v اقتران واحد لواحد وشاملاً من s الى v فان $\bar{v}$ يكون اقتران واحد لواحد وشاملاً من v الى s .
رأينا ان تركيب الاقترانات يكون عملية ثنائية تجميعية على $\exists (s)$ فلنربط هذه النتيجة مع ما جاء في هذا البند لبرهنة ان $(\exists (s), \circ)$ تكون زمرة.

مسألة :

استعمل النتائج السابقة وتشمل التمهيديتين ٥١ ، ٥٢ ، لبرهنة النظرية التالية :

نظرية :

لتكن م (س) المجموعة المكونة من جميع اقترانات الواحد لواحد الشاملة التي تقرب المجموعة غير الخالية س مع نفسها . فتكون م (س) زمرة بالنسبة لعملية تركيب الاقترانات . وهكذا فلكل مجموعة غير خالية س هنالك زمرة م (س) عناصرها مكونة من الاقترانات ذات الواحد لواحد الشاملة المعرفة من س الى نفسها . ويهمننا بشكل خاص الزمرة م (س) عندما تكون س مجموعة منتهية . فليكن ن اي عدد صحيح موجب ولتكن

$$S = M(\{1, 2, 3, \dots, n\})$$

فتكون S زمرة بالنسبة لعملية تركيب الاقترانات . وكاملة على عناصر S انظر المسألة ٤٢.

تعريف :

تبديلية اي مجموعة غير خالية هي اقتران واحد لواحد شامل من المجموعة الى نفسها. تسمى الزمرة S المكونة من جميع تبديلات $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ زمرة التماثل التام على المجموعة $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. تذكر ان S هي مجموعة كل تبديلات المجموعة $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ وليست المجموعة $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ نفسها .

وعند العمل بالتبديلات على المجموعات المنتهية من المفيد والمعتاد استعمال رمز خاص من سطرين للدلالة على قاعدة التبديلية. فلتكن و عنصراً في S معرف كالآتي : و (١) = ١ ، و (٢) = ٢ ، و (٣) = ٣ ، ... ، و (ن) = ن . بطريقة رمز السطرين ، نكتب و كالآتي :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = \text{و}$$

وبهذا الاصطلاح تكتب الصورة و (ك) = ك في السطر الثاني في اسفل ك مباشرة.

مسألة :

ليكن و الاقتران المعروف على $\{1, 2, 3, 4\}$ بالقاعدة و (١) = ٢ ، و (٢) = ٣ ، و (٣) = ٤ ، و (٤) = ١ . وبهذا فان و (٤) = ٢ . و (٤) = ٢ . وبهذا فان و (٤) = ٢ .

اكتب و على شكل رمز السطرين . في حساب تركيب اقترانين في S تذكر ان و (هـ) (ك) = و (هـ ك) لكل ك و هـ في S .

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \text{و}^{\circ}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \text{ه}^{\circ}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \text{ه}^{\circ} \text{و}^{\circ} \text{ه}^{\circ}$$

نبدأ الحساب مع الاقتران الايسر لايجاد (و^ه) (١) = و^ه (١) = و^ه (١) = و^ه (٢) = ١.
مسألة :

احسب و^ه ه^ه للاقترانين ووه اعلاه وعبر عن احابتك بطريقة السطرين و^ه ه^ه = $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ثم احسب ه^ه ه^ه و^ه ه^ه هل و^ه ه^ه = ه^ه ه^ه ؟
لاحظ ان الاقتران

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \text{و}^{\circ}$$

يمكن كتابته بطرق عديدة على شكل الرمز ذي السطرين وذلك بتغيير ترتيب الارقام التي في السطر العلوي ولهذا فان

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \text{و}^{\circ} \text{ وهكذا.}$$

لماذا تمثل كل هذه العبارات نفس الاقتران ؟

مسألة :

استعمل رمز السطرين لكتابة كل العناصر في S^٥ . كم عنصراً يوجد في S^٥ ؟
قبل حل المسألة ٥٨ يحسن مراجعة اصطلاحات جداول العمليات المعطاة في البند ١,١.

مسألة :

ابدأ بعمل جدول لـ (S^٥, ٥). ومن اجل وحدة العمل فقد عينا في الجدول ١,١٥ ترتيب للعناصر في السطر العلوي . احسب مدخلات الصفوف الثلاثة الاولى وفي اول عمودين من الجدول ١,١٥ واترك البقية كوظيفة بيتية .

انتبه لترتيب تركيب العناصر . وعلى سبيل المثال لاحظ المدخلة الموجودة في الجدول.

مسألة :

اوجد عنصراً محايداً في $(S, \cdot)$ واوجد معكوس كل $s \in S$. هل تكون $(S, \cdot)$ تبديلية ؟ ▲
 رأينا انه لاي عدد صحيح موجب n ، تكون $(S, \cdot)$ زمرة . فلنعين الآن سعة الزمر S ونبين
 ان هذه الزمر تزودنا بامثلة اخرى على زمر غير تبديلية .

مسألة :

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً ثابتاً. فما عدد عناصر الزمرة S_n ؟ لماذا؟

مسألة :

برهن انه لاي عدد صحيح $n \leq 3$ تكون الزمرة $(S_n, \cdot)$ غير تبديلية ▲ ويزودنا تركيب
 التبديلات بعملية ثنائية تختلف عن العمليات التي رأيناها في ضرب الاعداد والمصفوفات وجميعها
 ، فقد رأينا انه عندما تحتوي S_n على ثلاث عناصر او اكثر لا تكون الزمرة $(S_n, \cdot)$ تبديلية ،
 وبتغير عدد العناصر في S_n نحصل على زمر مختلفة كثيرة تزودنا بعدة امثلة وامثلة
 معاكسة في دراستنا لخصائص الزمر بشكل عام .

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	0
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

الجدول ١-١٥

تمارین :

١. اكتب جدول العملية على (S ، ٥) ، هل هذه الزمر تبديلية ؟
٢. اكمل جدول العملية على (S ، ٥) وتحقق من صحة اجابتك في لقائك التالي مع زملائك في الصف .
٣. سيستعمل جدول العملية على S فيما بعد وذلك لتوضيح مفاهيم عدة في نظرية الزمر . ولهذا السبب من الملائم استخدام الحروف لتسمية التبديلات . اعد كتابة الجدول ١،١٥ على S باستخدام الاحرف و ، α ، β ، γ ، δ ، بالترتيب المبين في الجدول ١،١٦ . تحقق من اجابتك في الصف .

باستعمال اصطلاح السطرين.
 ٢. كي تثبت ان S مغلفة بالنسبة للتركيب

$$\text{احسب} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p & p & \dots & p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p & p & \dots & p \end{pmatrix}$$

ب. العنصر المحايد في S هو $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$

ج. اذا كانت

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p & p & \dots & p \end{pmatrix} = \text{وه}$$

فان

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p & p & \dots & p \end{pmatrix} = \text{وه}$$

٦. برهن التمهيدية ٥٢

٧. اوجد اقترانا عكسياً لكل من الاقترانات الواحد لواحد الشاملة التالية : (لاحظ التمرين

(١ - ١,٤

٢. و: $R = \{0\}$ معطى بالمعادلة و: $(s) = \frac{1}{s}$

ب. و: $\{s : s < 0\} \leftarrow \{s : s < 0\}$ معطى بالمعادلة و: $(s) = \frac{1}{s}$

ج. ه: $\{s : 0 < s < 1\} \leftarrow \{s : s < 0\}$ معطى بالمعادلة ه: $(s) = \frac{1}{s-1}$

٨. ليكن و: اقتران واحد لواحد شاملاً من S الى S وليكن ه: $S \rightarrow S$ اقتراناً بحيث ان

$(ه \circ و)(s) = s$ لكل $s \in S$

اثبت ان ه = و

هذا يثبت ان معكوس الاقتران وحيد.

٩. ليكن و: $S \rightarrow S$ ، ه: $S \rightarrow S$

اقترانين بحيث ان $(ه \circ و)(s) = s$ لكل $s \in S$

و $(و \circ ه)(s) = s$ لكل $s \in S$.

٢. برهن ان و: اقتران واحد لواحد وشاملاً من S الى S

ب. برهن ان $ه = ق$

١٠. لتكن (ص ، *) زمرة . ولتكن $س$ مجموعة غير خالية ولتكن $ق$ (س،ص) مجموعة كل الاقترانات $ق$: $س \rightarrow ص$. فلكل زوج $و$ ، $ه \in ق$ (س،ص)

عرف $و * ه$: $س \rightarrow ص$ بوضع

$$(و * ه)(س) = و(س) * ه(س)$$

١١. لتكن $س$ = { $س : س \in R$ ، $٠ \leq س \leq ١$ } ، ولتكن $(+، R)$ هي الزمرة المفروضة فتكون $ق$ (س ، ص) هي المجموعة المكونة من كل الاقترانات ذات القيم الحقيقية التي مجالها الفترة $[١، ٠]$

في هذه الحالة تكون العملية على $ق$ (س،ص) هي العملية العادية لجمع الاقترانات وعلى سبيل المثال ، لتكن

$$و(س) = س^٢ + ١ ، ه(س) = ٢س^٢ - ٢س + ١$$

حيث $٠ \leq س \leq ١$ أوجد $ق + ه$

عرف اقتران $و$: $س \rightarrow R$ بحيث ان $و + و = و$ لكل

$و \in ق$ (س ، ص) : $و(س) = \frac{1}{س}$ لكل $س \in [١، ٠]$

عرف الاقتران $ق$: $ق(س، ص) = ق(س) + ق(ص)$ بحيث ان $ق + ق = ق$ و

ب. لتكن $س$ مجموعة غير خالية و (ص ، *) زمرة

بين انه اذا كانت $ق$ ، ه اقترانين من $س$ الى $ص$ فان $ق * ه$ هو اقتران من $س$

الى $ص$ برهن ان التناظر (ق ، ه) $\rightarrow ق * ه$ يعرف عملية ثنائية على $ق$ (س، ص)

(ص ،

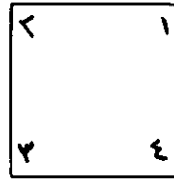
ج. برهن انه اذا كانت $س$ مجموعة غير خالية و (ص،*) زمرة فان $ق$ (س،ص،*)

تكون زمرة حيث هي العملية المعرفة اعلاه على $ق$ (س ، ص).

١,٦ زمر التماثل للاشكال الهندسية

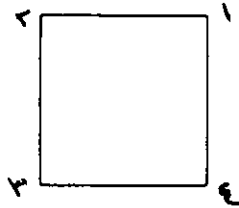
هناك مجموعات من التبديلات يمكن تصويرها كتماثلات للاشكال الهندسية المنتظمة او حركتها المتماثلة التي تنقل كل رأس في الشكل الى رأس آخر. وفي اي حركة متماسكة او تماثل لا يمكن قطع الشكل (كالمربع مثلا او المثلث المتساوي الاضلاع) وشنيه او تغيير هيكله باي وجه ولكن يمكن قلبه او تدويره بحيث ان كل رأس في الشكل ينتقل الى رأس .

لندرس تماثلات المربع . لكي نتصور تماثلات المربع استعمل لوح كرتون او ورقة مربعة وسم رؤوسها بعكس عقارب الساعة ، كما هو مبين في الشكل ١,٩ . اكتب على كل رأس رقمه على وجهي لوح الكرتون.



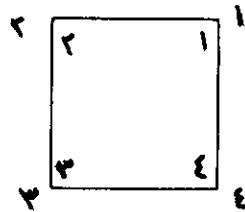
الشكل ١,٩

ارسم المربع على قطعة ورق او لوح من الكرتون وسم مواقع الرؤوس لهذا الرسم ، كما هو مبين في الشكل ١,١٠

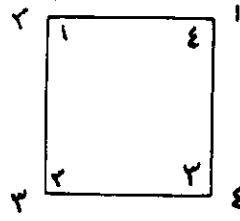


الشكل ١,١٠

ضع لوح الكرتون المربع فوق المربع المرسوم بشرط ان تكون الرؤوس ذات الارقام المتساوية متطابقة ، كما هو مبين في الشكل ١,١١ . والآن ادر لوح الكرتون 90° بعكس عقارب الساعة (حتى تنطبق الرؤوس مرة اخرى). (لاحظ الشكل ١,١٢).



الشكل ١,١١



الشكل ١,١٢

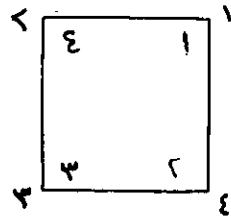
بهذا الدوران نقل رأس من الموضع ١ الى الموضع ٢ ، ورأس آخر من الموضع ٢ الى الموضع ٣ . وهكذا . فهذا الدوران ، ولنسمه ρ يمكن وصفه بالتبديلة

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \rho$$

تابع ادارة المربع بعكس عقارب الساعة وارسم النتيجة بعد كل دورة . اكتب التبديلة التي تناظر كل دورة وضع رموزاً لهذه التبديلات الجديدة على الترتيب ρ, ρ^2, ρ^3 وهكذا . ولتكن و ترمز للتبديلة التي تمثل الموضع الابتدائي (الشكل ١,١١) . (احتفظ بالرسوم للمستقبل) !
والان ادر المربع حول القطر الذي يصل بين الرأسين ١ و ٣ لتحصل على الشكل ١,١٣.

اكتب التبديلة المناظرة ولنرمز لها بالرمز σ

ما هي نتيجة الدوران مرة اخرى ، مبتدئاً بالشكل ١,١٣ ؟



الشكل ١,١٣

ابداً من الموضع الابتدائي (الشكل ١,١١) وادر المربع حول القطر الواصل بين الرأسين ٢ و ٤ . ارسم النتيجة واكتب التبديلة المناظرة واجعل رمزها σ . ما هي نتيجة استمرار الدوران حول القطر؟

مسألة :

جد التماثلات المتبقية للمربع . صف كل حركة ، ارسم شكلاً يبين النتيجة واكتب كل تماثل بصيغة تبديلية .

مسألة :

اثبت ان عدد تماثلات المربع يساوي ————— بالضبط ▲

ان التركيب او حاصل الضرب ، $\sigma\tau$ يعرف باجراء τ اولاً ثم اجراء σ على النتيجة وهذا يتفق مع ما اصطلاحنا عليه لتركيب التبديلات .

لايجاد اي تركيب سـ ص ابدأ دائماً بالمربع في موضعه الابتدائي .

مسأله :

ابدأ بجدول عملية لتماثلات المربع . وللتوافق اطلب من مدرسك ان يختار اسماً حرفياً لكل تماثل وان يعين ترتيب العناصر في السطر الاعلى لجدول العملية . استعمل الحروف و ، ١ ، ٥ ، u مع الارقام السفلية المناسبة.

احسب العناصر الموجودة في الصفوف الاربعة الاولى والعمودين الاولين في الجدول ١،١٧ واترك الباقي كوظيفة بيتية . حرك مربعك الكرتوني لعمل الجدول . ولايجاد تركيب لأي حركتين . قم بالحركتين على التتابع ، وابدأ دائماً بحيث يكون المربع في موضعه الابتدائي (الشكل ١،١١) وبعد ذلك قارن النتيجة مع الصور التي حصلت عليها من الحركتين واذا شئت فدقق اجاباتك بحساب تركيب التبديلات .

جدول التركيب لتماثلات المربع

٥	
	الجدول ١،١٧

مسألة :

لتكن D ، ترمز الى مجموعة تماثلات المربع . اثبت ان $(D, \circ)$ تكون زمرة .
هل هذه الزمرة ابدالية ؟

نرى ان مجموعة تماثلات المربع تكون زمرة بالنسبة لعملية التركيب .
والواقع انه في اي مضلع مستو منتظم ذي n من الاضلاع تكون المجموعة D_n من كل التماثلات
زمرة بالنسبة للتركيب . وهذا هو مدار التمارين التالية :

تمارين :

١. اكمل جدول العملية لتماثلات المربع (انظر المسألة ٦٤) وافحص نتائجك في لقاءك التالي مع
رفاق صفك.

٢. لتكن D_3 مجموعة تماثلات المثلث المتساوي الاضلاع .

٢. صف كل تماثل في D_3 بالصور والكلمات . وبعد ذلك اكتب كل تماثل على شكل تبديلة

ب. اعمل جدول عملية للمجموعة D_3 وبرهن ان $(D_3, \circ)$ تكون زمرة.
هي زمرة تبديلية ؟

٣. لتكن D_4 مجموعة تماثلات الشكل الخماسي المنتظم . صف عناصره D_4 وبرهن ان $(D_4, \circ)$
تكون زمرة.

٤. لتكن D_6 مجموعة تماثلات الشكل السداسي المنتظم صف عناصره D_6 وبرهن ان $(D_6, \circ)$
تكون زمرة .

٥. للتحدي : ليكن $n \geq 3$ عدداً صحيحاً ثابتاً . ولتكن D_n مجموعة تماثلات الشكل المستوي
المنتظم الذي عدد اضلاعه n .

٢. صف العناصر في D_n . سنحتاج الى اعتبار حالتين احدهما عندما تكون n عدداً
زوجياً والاخرى عندما تكون عدداً فردياً.

ب. كم عنصراً موجوداً في D_n ؟

ج. اثبت ان $(D_n, \circ)$ تكون زمرة .

د. اثبت ان لكل $n \geq 3$ لا تكون D_n زمرة تبديلية .

٦. لنناقش مجموعة تماثلات احدى الاشكال المنتظمة غير المنتظمة ، وليكن مستطيلاً بشكل
عام . صف بالصور والكلمات كل تماثل للمستطيل العام . وبعد ذلك اكتب كل تماثل على
صورة تبديلية اعمل جدول تركيب واثبت ان المجموعة المكونة من كل التماثلات للمستطيل
تكون زمرة بالنسبة لعملية التركيب.



١,٧ التطابق في مضاعفات ن

يعلم الناظر للساعة انها تعمل بنظام عد غير عادي . فالعقرب يتحرك حول القرص من ١ الى ١٢ وبدلاً من ان يستمر الى ١٣ فانه يعود ثانية الى ١ . وبالنسبة الى ساعة اليد فان الساعة الواحدة صباحاً والواحدة بعد الظهر من البارحة او اليوم او الغد او قبل ٣٠ يوماً كلها نفس الشيء . ولهذا فان الساعة تعطينا مثلاً على المفهوم الرياضي للتطابق في مضاعفات ن (في هذه الحالة ن = ١٢).

في هذا البند يحتاج الطالب ان يلم بعلاقات التكافؤ ومفهوم القسمة وخوارزمية القسمة (انظر الملحقين ٥,٤).

تعريف :

ليكن ن عدداً صحيحاً موجباً . نقول ان العددين P و B متطابقان في مضاعفات ن اذا وفقط اذا كان الفرق بينهما يقبل القسمة على ن . وهذا يعني ان P تطابق B في مضاعفات ن اذا وفقط اذا وجد عدد صحيح ك ، بحيث ان $P - B = Kn$ وبالرموز نكتب $P \equiv B \pmod{n}$ (مض ن) اذا وفقط اذا كانت $n \mid (P - B)$.

لاحظ التمرين ١,٨ - ٥ للتعريف عندما تكون $n = ٠$.

مسألة :

اختر قيم P ، B ، و n للحصول على عدة امثلة تحقق $P \equiv B \pmod{n}$ (مض ن) اذا لم يكن P و B متطابقين في مضاعفات ن فاننا نكتب $P \not\equiv B \pmod{n}$ (مض ن).

مسألة :

اعط عدة امثلة بحيث تكون $P \equiv B \pmod{n}$ (مض ن) ان المسألتين التاليتين تبيان ان التطابق في مضاعفات ن قريب الشبه بالتساوي.

مسألة :

اثبت التمهيدية التالية :

تمهيدية :

علاقة التطابق في مضاعفات ن على Z هي علاقة تكافؤ.

اذكر اولاً خصائص الانعكاس والتماثل والتعدي للتطابق في مضاعفات ن (انظر التعريف ١ في الملحق ٤) ثم برهن انها تنطبق على هذه العلاقة .

مسألة :

برهن التمهيدية التالية كما في ١.

تمهيدية :

إذا كانت P ، b ، $d \in Z$ تحقق $P \equiv b \pmod{d}$ (مض ن) . فإن

$$P + d = b + d \pmod{d}$$

$$P - d = b - d \pmod{d}$$

$$P - b = d \pmod{d}$$

وزيادة على ذلك فإذا كانت P ، b ، d ، $e \in Z$ تحقق

$$P \equiv b \pmod{d} \text{ و } b \equiv d \pmod{e} \text{ . فإن}$$

$$P + d = b + d \pmod{e}$$

$$P - d = b - d \pmod{e}$$

٢. برهن العبارة الأولى ($P + d = b + d \pmod{e}$) (مض ن)

اترك براهين العبارات الباقية للتمرين ٢

ب. اذكر بالكلمات النتائج التي تشملها التمهيدية . فمثلا امكن اضافة اي عدد صحيح لكل من

عددين متطابقين فيكون الناتج عددين متطابقين .

عندما يكون لدينا علاقة تكافؤ يمكن تكوين صفوف تكافؤ . وفي حالة التطابق في

مضاعفات ن تعطى هذه الصفوف اسماً خاصاً :

تعريف :

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً فلكل $P \in Z$ ليكن

$$P \pmod{n} = \{s : s \in Z \text{ و } s \equiv P \pmod{n}\}$$

لاحظ ان كل صف P هو نفسه صف التكافؤ الذي تنتمي اليه P

مسألة :

٢. في الصف

$$\{s : s \in Z \text{ و } s \equiv 0 \pmod{5}\}$$

أوجد عدة عناصر موجبة وعدة عناصر سالبة . كون صيغة تتولد منها كل عناصر الصف .

ضع الصف على خط الاعداد . ما عدد عناصر الصف صفري ؟

ب. أوجد عدة عناصر موجبة وعدة عناصر سالبة من الصف ١٥ . اذكر صيغة تعطي كل عناصر

الصف .

جـ استمر في وصف صفوف تطابق في مضاعفات ٥ حتى يكون كل عدد صحيح محتوي في احد

الصفوف . كم صفاً يلزم ؟

هل يوجد في بعض الصفوف عناصر مشتركة ؟ وضح .

تذكر ان صفين من صفوف التكافؤ يكونان متساويين اذا وجد بينهما عنصر واحد مشترك

على الاقل.

مسألة :

٢. اكتب قائمة فيها عدة عناصر من كل من الصفوف $(-٤)_m$ ، a_6 ، a_1 ، a_{11} بين ان هذه الصفوف هي في الحقيقة متساوية اي ان $(-٤)_m = a_6 = a_1 = a_{11}$ ولهذا فالرموز $(-٤)_m$ ، a_6 ، a_1 ، a_{11} ما هي إلا اسماء مختلفة لصف واحد.
- ب. اوجد عدة قيم للعدد الصحيح $b \in \mathbb{Z}$ الذي يحقق $b = a_2$ في كل من التمهيدات التالية . حاول ان تعطي برهاناً قصيراً جداً باستعمال خصائص علاقة التكافؤ . يمكنك ان تستعمل النظرية ٦ في الملحق ٤.

في كلا المسألتين ن عدد صحيح موجب ثابت .

مسألة :

اكمل العبارة في التمهيدية التالية وبرهن عليها .

تمهيدية :

لكل a ، b ، $b \in \mathbb{Z}$ ، $a = b$ اذا وفقط اذا كان _____ .

مسألة :

برهن التمهيدية التالية :

تمهيدية :

اذا كان a ، $b \in \mathbb{Z}$ و $a \cap b \neq \emptyset$

فان $a = b$.

ان التمهيدية ٧٥ تبين انه اذا كان $a \neq b$ فان $a \cap b = \emptyset$ ولهذا فان اي صفين مختلفين a و b لا يمكن ان يحتويوا عناصر مشتركة .

رأينا ان كل صف تكافؤ مثل a له اسماء عديدة (مثل $(-٤)_m$ ، a_6 ، a_1 وهكذا) .

ومن المفيد احياناً تعيين الصف باصغر عنصر غير سالب مثل a في المسألة ٧٣ ا) .

ولكي نعمل هذا لاي صف ، a ، نستخدم خوارزمية القسمة ليجاد الباقي عندما تقسم a على n . ان هذا الباقي هو العدد الذي نبحث عنه .

مسألة :

ليكن $a \in \mathbb{Z}$ وليكن n عدداً صحيحاً موجباً .

برهن انه اذا كانت $a = n \cdot m + r$ ، $0 \leq r < n$ فان $a \cap n = r$. هذا الرقم r ، الباقي عندما قسمت a على n ، هو في الواقع اصغر عنصر غير سالب في $a \cap n$ (لاحظ المثال ٤) .

مسألة :

كم عدد صفوف التكافؤ المختلفة لاي عدد صحيح موجب محدد ، n ؟

اكتب قائمة بهذه الصفوف مبتدئاً بالصف صفر . استخدم المسألة ٧٦ لتبين ان كل صف تكافؤ
ان يظهر في مكان ما في قائمتك .

تمارين :

١. في لكل صف تكافؤ

$$\{s : s \in Z \text{ و } s \equiv p \pmod{6}\} = p$$

اوجد عدة عناصر موجبة وعدة عناصر سالبة . كون صيغة تحصل منها على كل عناصر p .
ثم مثل هذه الصفوف على خط الاعداد .

٢. اكمل برهان التمهيدية ٧٠

٣. * انظر خاصية الاختزال التالية : اذا كان $a \equiv b \pmod{p}$ و $c \equiv d \pmod{p}$ فان $a + c \equiv b + d \pmod{p}$.

٢. اوضح خاصية الاختزال عندما تكون $n = 5$.

ب. تفحص خاصية الاختزال عندما تكون $n = 6$. هل هذه الخاصية تتحقق ؟ وضح .

ج. اعط مثالا معاكساً لخاصية الاختزال في حالة $n = 10$.

د. برهن ان خاصية الاختزال صحيحة اذا كانت n عدداً اولياً ٥.

٤. n عدد صحيح موجب ثابت و $a \in Z$

اثبت انه اذا كانت $a = n \cdot m + r$ ، $0 \leq r < n$ تكون r اصغر عنصر غير سالب في الصف a .

٥. n عدد صحيح موجب ثابت و $a \in Z$ ، $b \in Z$

برهن ان $a \equiv b \pmod{n}$ اذا وفقط اذا كان الباقي عند قسمة a على n هو نفس الباقي عند قسمة b على n .

١,٨ زمر الجمع Z_n

لقد رأينا ان كل عدد صحيح موجب ثابت n يمكن ان تعرف له علاقة تكافؤ تسمى
التطابق في مضاعفات n . وفي هذا البند نتابع دراستنا لصفوف التكافؤ . لهذه العلاقة فنناقش
اولا مجموعة صفوف التكافؤ هذه لعدد ثابت n ثم نعرف عملية جمع لهذه الصفوف لنحصل على
زمرة جديدة.

تعريف :

لاي عدد صحيح موجب ثابت n لتكن Z_n هي المجموعة المكونة من كل صفوف التكافؤ المختلفة

ان حيث $Z \ni a$:

$$\{Z \ni a\} = Z$$

لاحظ ان كل عنصر في Z ، هو صف تكافؤ (باسماء مختلفة عديدة) وليس عدداً.

مسألة :

- أ. اكتب قائمة بالعناصر المختلفة في Z ، في Z في Z .
ب. اكتب قائمة بالعناصر المختلفة الموجودة في Z حيث ثابت .
هل Z مجموعة منتهية ؟ أم غير منتهية.

تعريف :

لتكن n عدداً صحيحاً موجباً ثابتاً . فلكل a ، b ، $Z \ni a$ فان حاصل الجمع $a + b$ للصفين a ، b في Z هو صف تكافؤ العدد الصحيح $a + b$.
ولهذا فان $a + b$ في $Z = (a+b)$.

مسألة :

استعمل التعريف ٨٠ لحساب $٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨$. يجب ان نبرهن ان الجمع على Z الذي اعطي في التعريف ٨٠ هو عملية ثنائية معرفة تعريفاً حسناً . فمن الواضح ان التناظر $(a, b) \mapsto (a+b)$ يقرب الزوج (a, b) بعنصر في Z وبما ان العناصر في Z لها اسماء عديدة فلن يتضح ببساطة ان هذا التناظر هو اقتران ولذا فانه من الضروري ان نبرهن ان التناظر يقرب كل زوج (a, b) بعنصر واحد بالضبط في Z دون اي اعتبار للاسماء التي تختارها للعنصرين a ، b . فمثلا اننا نعلم ان $٢ + ١٠٢٧ = ٤ + ٢١٣٤$. (لماذا ؟) واذا كان الجمع المعروف اعلاه عملية ثنائية فاننا يجب ان نحصل على $(٢+٤) = ١٠٢٧ + ٢١٣٤$.

مسألة :

استعمل التعريف ٨٠ لحساب $٢ + ٤$ و $١٠٢٧ + ٢١٣٤$.

هل تحصل على نفس الجواب ؟

ب. بين ان $٢ = (-٨)$ وكذلك $٣ = ١٨$.

استعمل التعريف ٨٠ لاجاد $٢ + ٣$ ، $(-٨) + ١٨$. هل الجوابان متساويان ؟

مسألة :

كي تبرهن ان الجمع اقتران معرف تعريفاً حسناً من $Z \times Z$ الى Z .
برهن لتمهيدية التالية :

تمهيدية :

لتكن $P, b, \bar{P}, \bar{b}$ تحقق $Z \ni \bar{P} = \bar{b}$ و $\bar{P} = \bar{b}$ فان
 $P + \bar{b} = \bar{P} + \bar{b} = \bar{b}$.

تبين التمهيدية ٨٢ أن الجمع المعطى في التعريف ٨٠ هو عملية ثنائية على Z . وقبل برهنة (Z) ،
 (+) زمرة لناخذ المثال التالي :

مسألة :

- كون جدول جمع على Z مستعملاً الجدول ١,١٨.
- اوجد نظير كل عنصر في Z .
- هل الجمع في Z تبديلياً ؟ علل اجابتك .
- حقق حالة خاصة واحدة على خاصية التجمع في Z .

+	صفر	١
صفر		
١		

الجدول ١,١٨

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً ثابتاً . فتكون $(Z, +)$ زمرة .

مسألة :

هل الجمع في Z تبديلي ؟ برهن اجابتك صحيحة.

لدينا الآن امثلة متنوعة من المجموعات منها ما هو تبديلي او غير تبديلي .
ورأينا زمراً تتعين بالجداول وزمراً مكونة من اعداد او مصفوفات او تبديلات ، او تماثلات ،
ورأينا اخيراً زمراً من الاعداد الصحيحة في مضاعفات n . في الفصل القادم ستستعمل هذه الامثلة
مراراً لتوضيح نظريات ولوضع بعض الامثلة المعاكسة ، ولكي تساعدنا في اكتشاف النتائج المهمة

تمرين :

١. كون جدول جمع على $\mathbb{Z}$. جد عنصراً محايداً في $\mathbb{Z}$ ثم جد نظيراً جمعياً لكل عنصر في $\mathbb{Z}$.
حقق حالة واحدة على خاصية التجميع في $\mathbb{Z}$.
٢. ليكن l عدداً اولياً اكبر من ٢ . اكمل العرضية التالية : ان حاصل الجمع لكل
العناصر في $\mathbb{Z}$ يساوي _____

$$\bullet \text{ ————— } = \sum_{p=1}^{l-1} p \quad \text{وبالرموز}$$

ب. برهن العرضية

- ح. هل العرضية صحيحة في $\mathbb{Z}$ لأي من قيم n غير الاولى ؟
اذا كان ذلك فلائي منها ؟ هل تكون صحيحة اذا كانت $n = 2$ ؟
- د. برهن انه اذا كان l عدداً اولياً اكبر من ٢ ، فان l تقسم حاصل الجمع الناتج عن
اول $l-1$ من الاعداد الصحيحة :

$$\sum_{p=1}^{l-1} p \mid l$$

هل هذا صحيح لأي عدد غير اولي ؟

- *٣. نعلم من نظرية الاعداد انه اذا كانت k عدداً صحيحاً موجباً و $z \in \mathbb{Z}$ فالرمز $k \mid z$ يعني
حاصل جمع $1 + 2 + \dots + k$ ، k من المرات . ويمكننا ان نعرف بالمثل $k \mid n$ اذا كانت
 n عدداً صحيحاً موجباً ثابتاً و $n \in \mathbb{Z}$ ولكن سنقوم بذلك استنتاجاً كما يلي :

$$1 \times 1 = 1^2 , 1^2 + 1^2 = 2^2 ,$$

اذا عرف k . $n \mid k$ فان

$$(k+1) \mid n . k \mid n + 1^2$$

٢. بين ان $k \mid n$. $(k \mid n) \Leftrightarrow (k+1 \mid n)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$. لهذا فالمضروب (k) . n لصف التكافؤ أن

هو صف مضاعفات ك P .

ب. احسب (6) ، (3) ، (6) ، (4) ، (5) ، (2) ، (121) ، (2) .

٤. للتحدي . للمعادلة ك س = ٠ حيث ك $\neq$ ٠ حل سهل واحد بالضبط في الاعداد الحقيقية

هو س = ٠ ، وفي هذا التمرين ندرس المعادلة المقابلة ، ك س = صفر ، في زمرة الجمع Z

. نريد ان نثبت ان هذه المعادلة ك س = صفر حيث ك عدد صحيح ثابت يمكن ان

يكون لها عدد من الحلول يصل الى ك هي قيم س في Z

لكل من الاعداد الصحيحة ك = ٨، ٧، ٣، ٢ ، أوجد كل العناصر

$P \ni Z$ حيث ان ك P = صفر

استعمل تعريف ك P في التمرين ٣.

ب. ليكن ن و ك عددين صحيحين موجبين ثابتين . بين ان المجموعة $E = \{n : n \in P \text{ و } n \in Z\}$

، ك n = صفر

تكون زمرة بالنسبة للجمع . لاحظ ان E هي مجموعة كل حلول المعادلة

ك س = صفر في Z . ليكن ن و ك عددين صحيحين موجبين ثابتين ولتكن د =

قم P (ن، ك) حيث قم P ترمز الى القاسم المشترك الاعظم ، ن = د ، وك = ك، د

(انظر الملحق ٦)

ح. بين ان ك ح = صفر

د. بين انه اذا كانت $P \ni Z$ و ك P = صفر

فان ح P •

هـ. اوجد عنصراً $P \ni Z$ بحيث يمكن كتابة زمرة الحل

$E = \{n : n \in P \text{ و } n \in Z\}$ ، ك n = ٠

بالصيغة $E = \{m : m \in P \text{ و } m \in Z\}$

كم عنصراً في E ؟

٥. عرف علاقة تطابق في مضاعفات الصفر على Z وذلك بوضع س $\equiv$ ص (مض ٠) . وتقرأ س

تطابق ص في مضاعفات الصفر اذا وفقط اذا كان س-ص = ٠

٢. برهن ان علاقة التطابق في مضاعفات . على Z هي علاقة تكافؤ ، وبالتحديد علاقة

التساوي.

ب. عرف $[P] = \{b : b \in P \text{ و } b \equiv ٠ \text{ (مض ٠)}\}$ فتكون $[P]$ صف تكافؤ P في

علاقة التكافؤ، هذه اكتب بعبارة صريحة $[0]$ ، $[2]$ ، $[-3]$ و $[P]$

حيث $P \ni Z$. صف كل صفوف التكافؤ لهذه العلاقة .

ح. لتكن $Z = \{[P] : [P] \in Z\}$

هل تكون Z مجموعة منتهية ام مجموعة غير منتهية ؟ علل اجابتك .

د عرف اقتراناً $و: Z \rightarrow Z$ وذلك بوضع $و(پ) = [پ]$.
 واذا كانت $پ = ب$ فلماذا تكون $و(پ) = و(ب)$ ؟ اثبت ان $و$ اقتران واحد لواحد
 وشامل من Z الى Z .

مراجعة

اشارات مهمة

عملية ثنائية تجميعية	اقتران
عملية ثنائية تبديلية	مجال
جدول عملية	مدى
مصفوفة 2×2	تساوي الاقترانات
مصفوفة غير منفردة	اقترانات واحد لواحد
زمرة تبديلية	او تباينية
عنصر محايد	اقتران شامل
عنصر نظير	اقتران مركب
تبديلية	مجموعة الصور
زمرة التماثل التامة	ضرب (جداء) ديكارتي
تماثل	عملية ثنائية التركيب
التطابق في مضاعفات ن	تركيب (اقترانين)
	خاصية الانغلاق

الرموز

(R)	ق (س)
$(س، ٥)$ ، $(س، +)$ ، $(س، ٠)$	ق: $س \rightarrow س$
$(ل، ٠)$	او $س \xrightarrow{ل} س$
$٢، ١، ٢$	Z
ق ٥ هـ (اقترانات)	Q
	R
م (س)	$+ Z$

$$P \equiv S \text{ (مض ن)}$$

$$P_n$$

$$Z_n$$

$$+R$$

$$S_n$$

$$D_n$$

$$S_n \times S_n$$

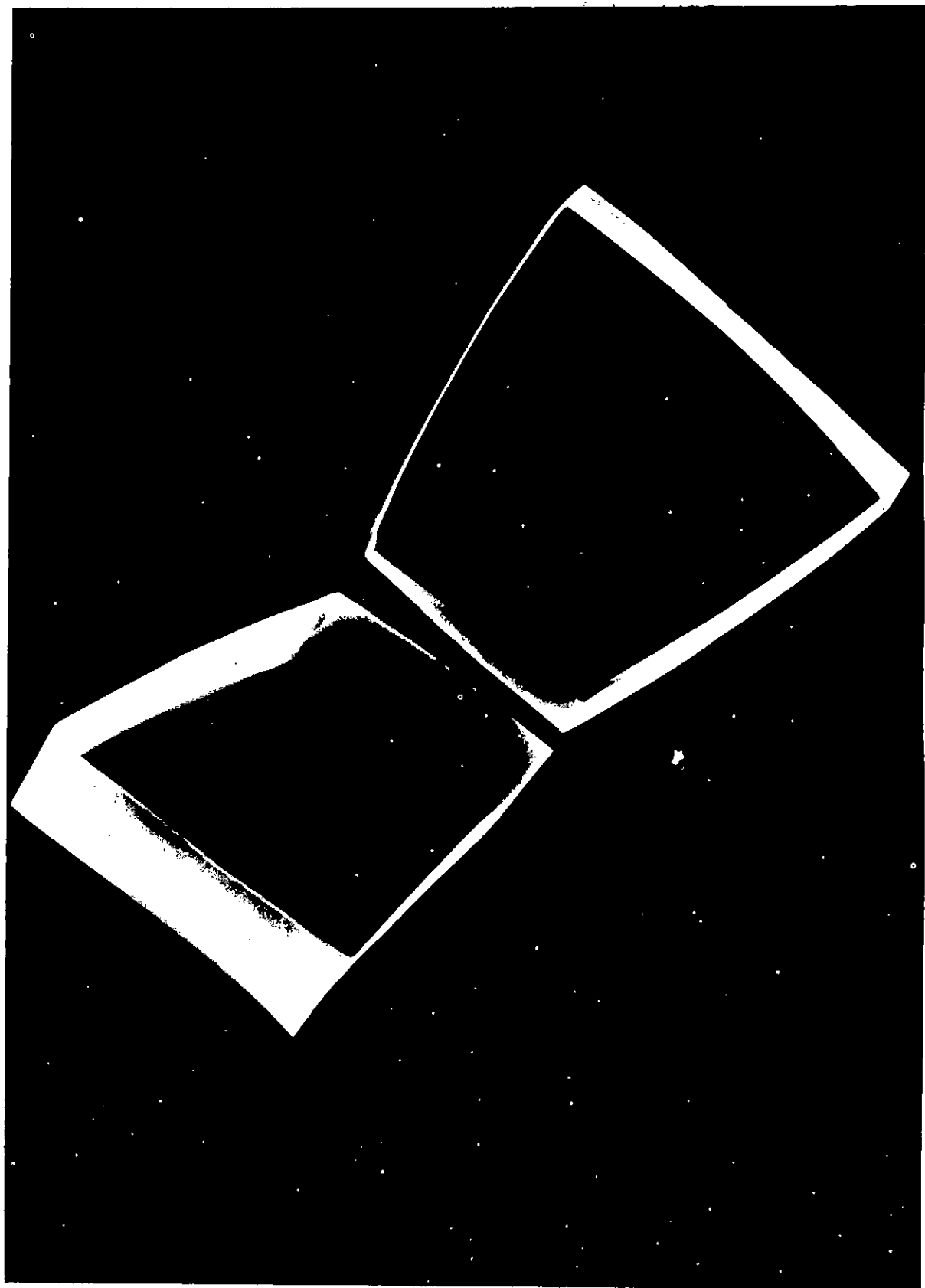
اسئلة :

١. ما هي قوانين الاختزال للزمرة ؟ اكتب قائمة ببعض الخصائص الاخرى للزمرة . فعلى سبيل المثال ، هل يمكن ان يكون لزمرة اكثر من عنصر محايد واحد؟
٢. اذكر نظريتين كل منهما تعطي اوليات مختلفة للزمرة
٣. ليكن $F: S_n \rightarrow S_n$ و $H: S_n \rightarrow S_n$ اقترانين . كيف يعرف الاقتران المركب $H \circ F$ ؟
- تحت اي شروط يكون للاقتران F و H اقتران عكسي F^{-1} : $S_n \rightarrow S_n$ وكيف تعرف الاقتران العكسي ؟
- ما هي الشروط التي تضعها على F و H ليصبح $H \circ F$ اقتران واحد لواحد ؟
- ما هي الشروط التي تضعها على F و H ليصبح $H \circ F$ اقتراناً شاملاً من S_n الى S_n ؟
٤. كم عنصراً موجوداً في الزمرة S_n ؟ لاي قيم n تكون S_n غير تبديلية ؟
٥. اذا كانت

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ m & p & \dots & n \end{pmatrix}$$

- عنصراً في S_n فما هو $F^{-1}(r)$ ؟ ما هو $F^{-1}(p)$ ؟
٦. ليكن $n \in \mathbb{Z}^+$ ثابتاً . فاذا كانت $Z \ni p$ ، فما هي الاعداد الصحيحة s التي تحقق العلاقة $s \equiv p \text{ (مض ن)}$ ؟
- ما هو العنصر القياسي للزمرة الجمع Z_n ؟ كم عنصراً موجوداً في المجموعة Z_n ؟ كيف يعرف الجمع في Z_n ؟
٧. اكتب قائمة تحتوي على عدة زمر جمع .
٨. اكتب قائمة تحتوي على عدة زمر ضرب .

تظهر عدة أمثلة مفيدة من الزمر في تمارين هذا الفصل . ان هذه تحتوي على الانظمة التالية :



الفصل الثاني

نظرية الزمر ، ١

قد تكون مجموعة جزئية من زمرة ما S هي نفسها زمرة باستعارة عملية S مثل هذه المجموعة الجزئية تسمى زمرة جزئية من S . وليست كل مجموعة جزئية زمرة جزئية.

سنطور في هذا الفصل نظرية عامة تتعلق بالزمر الجزئية لزمرة اختيارية . وسنعطي الشروط التي تحدد هل اي مجموعة جزئية معطاة هي فعلا زمرة جزئية ام لا . وسنجد ان شروطا حسابية معينة تسري على عدد العناصر التي يمكن ان تكون في زمرة جزئية كما سنعرض بعض الطرق التي يمكن ان تكون في زمرة جزئية كما سنعرض بعض الطرق لتكوين زمر جزئية من اي زمرة . وسنوضح ونطبق هذه الاعتبارات النظرية لايجاد زمر جزئية من الزمر التي مر ذكرها في الفصل الاول.

وسندرس بعض الاقترانات الخاصة من زمرة الى اخرى ونبين ان زمراً جزئية معينة ترتبط بهذه الاقترانات . وزيادة على ذلك سنستعمل هذه الاقترانات لمعرفة هل اذا كانت لهما زميرتين نفس عدد العناصر تكونان اساسياً زميرتين متشابهتين ، ام مختلفتين . واخيراً، ندرس طريقة لبناء زمرة جديدة من زمرة معطاة ونوع خاص من الزمر الجزئية، ونبين ان الاقترانات الخاصة المذكورة اعلاه مرتبطة ارتباطاً بهذه الزمر الجديدة.

٢,١ الزمر الجزئية

نرى في هذا البند كيف تكون بعض الزمر الجديدة المهمة من الزمر التي نعرفها. واحد الطريق لذلك هي اختيار مجموعات جزئية من الزمر المعروفة وبالطبع يمكننا ان نبين هل المجموعة الجزئية زمرة ام لا بفحص جميع اوليات الزمرة ولكن هنالك طريقة اكثر كفاءة

وفي هذا البند سنضع الشروط التي تضمن ان تكون مجموعة جزئية ما لزمرة معلومة S هي نفسها زمرة بالنسبة للعملية المستعارة من S . ولكن لنبين اولاً ماذا نعني بالعملية الثنائية على مجموعة جزئية.

لتكن $(S, \circ)$ زمرة ولتكن S' مجموعة جزئية من S . فانه لكل $a, b \in S'$ يكون التركيب (a, b) عنصراً في S واذا تحققت خاصية الانغلاق على S' بحيث ان $a, b \in S'$ لكل $a, b \in S'$ ، يكن هنالك اقتران (a, b) $\in S'$ من $S' \times S'$ الى S' . ويسمى هذا الاقتران العملية الثنائية المتولدة على S' (بواسطة العملية على S). واذا لم تتحقق خاصية الانغلاق على S' فلبعض $a, b \in S'$ يكون $a, b \notin S'$ لا ينتمي الى S' . ولهذا فان الاقتران المعرف على $S' \times S'$ بواسطة $(a, b) \mapsto a, b$ لا يكون عملية ثنائية على S' .

مثال : في زمرة الجمع R المكونة من الاعداد الحقيقية ، لتكن S' المجموعة Z_c المكونة من الاعداد الصحيحة الزوجية . فمن التمرين ١,١ - ٢ نرى ان عملية الجمع على R تولد عملية ثنائية على المجموعة Z_c ومن جهة اخرى فان عملية الجمع على R لا تولد عملية ثنائية على مجموعة الاعداد الفردية لان هذه المجموعة ليست مغلقة بالنسبة للجمع.

وبايجاز اذا كانت $(S, \circ)$ زمرة و S' مجموعة جزئية من S فان العبارتين التاليتين تكونان متكافئتين:

١. توجد عملية ثنائية على S' مولده عن العملية الثنائية الاصلية $\circ$ على S .
- ب. S' مغلقة بالنسبة للعملية $\circ$ (اي ان لكل $a, b \in S'$ ، $a, b \in S'$)

باخذ ما سبق بعين الاعتبار يمكن ان نعرف الان مفهوم الزمرة الجزئية كما يلي :

تعريف :

لتكن $(S, \circ)$ زمرة ، S' مجموعة جزئية غير خالية من S فتكون S' زمرة جزئية من S

إذا وفقط إذا كانت $(\varnothing, \varnothing)$ زمرة.

لاحظ ان التعريف ١ يقتضي ان تكون العملية في اي زمرة جزئية من S هي العملية المولدة على S من العملية الاصلية على S وزيادة على ذلك فان العملية المتولدة يجب ان تكون تجميعية ويجب ان تحتوي المجموعة S على عنصر محايد وعلى نظير لكل عنصر فيها. مثلاً ان كلا من Q, Z زمرة جزئية من R بالنسبة للجمع. ومن جهة اخرى فان المجموعة R^+ المكونة من كل الاعداد الحقيقية الموجبة تكون زمرة بالنسبة لعملية الضرب ولكنها ليست زمرة جزئية من R بالنسبة للجمع.

مسألة :

١. هل $\{1, 0, 1\}$ زمرة جزئية من Z بالنسبة للجمع؟
ب. لتكن S زمرة جزئية من Z بالنسبة للجمع بحيث ان $3 \in S$. اوجد ستة عناصر اخرى في S . هل S منتهية ام لا ؟

مسألة :

برهن ان اي مجموعة جزئية من Z صيغتها $\{ \text{---} \}$ هي زمرة جزئية من Z بالنسبة للجمع (يحسن دراسة بعض الامثلة أولاً)

مسألة :

جد كل الزمر الجزئية من Z بالنسبة للجمع

مسألة :

برهن ان لاي زمرة $(S, \varnothing)$ بحيث $S \neq \{ \}$ زمرتين جزئيتين على الاقل. هما $\{ \}$ و S . لان المجموعتين $(S, \varnothing)$ و $\{ \}$ تكونان دائماً زمرتين جزئيتين للزمرة S فاننا نهتم عادة بإيجاد زمرة جزئية غير هاتين . وتعطي لهذه المجموعات الجزئية اسماً خاصاً :

تعريف :

تكون الزمرة الجزئية S في الزمرة $(S, \varnothing)$ زمرة جزئية فعلاً اذا وفقط اذا كانت $S \neq \{ \}$ و S $\neq \varnothing$ وتسمى الزمرتان الجزئيتان S و $\{ \}$ زمرتين تافهتين. في جميع الامثلة التي لاحظناها في هذا البند على الزمر الجزئية كان العنصر المحايد للزمرة هو ايضاً العنصر المحايد للزمرة الجزئية وتبين المسألة التالية ان هذا يجب ان يكون دائماً صحيحاً .

مسألة :

برهن انه اذا كانت S زمرة جزئية من S فان العنصر المحايد في S وليكن e هو نفسه العنصر المحايد و للزمرة S .

مسألة :

لتكن $\mathcal{S}$ مجموعة جزئية فعلا للزمرة $\mathcal{S}$. اي من أوليات الزمرة يكون دائماً صحيحاً على $\mathcal{S}$ ؟
اي من الأوليات يجب تحقيقها على $\mathcal{S}$ كي نبرهن ان $\mathcal{S}$ زمرة جزئية من $\mathcal{S}$ ؟

(قد ترغب في فحص المجموعات الجزئية التالية :

$$\{0,0,0,0,0\}, \{0,0,0,0,1\}, \{0,0,0,1,0\}, \{0,0,0,1,1\}, \{0,0,1,0,0\}, \{0,0,1,0,1\}, \{0,0,1,1,0\}, \{0,0,1,1,1\}, \{0,1,0,0,0\}, \{0,1,0,0,1\}, \{0,1,0,1,0\}, \{0,1,0,1,1\}, \{0,1,1,0,0\}, \{0,1,1,0,1\}, \{0,1,1,1,0\}, \{0,1,1,1,1\}, \{1,0,0,0,0\}, \{1,0,0,0,1\}, \{1,0,0,1,0\}, \{1,0,0,1,1\}, \{1,0,1,0,0\}, \{1,0,1,0,1\}, \{1,0,1,1,0\}, \{1,0,1,1,1\}, \{1,1,0,0,0\}, \{1,1,0,0,1\}, \{1,1,0,1,0\}, \{1,1,0,1,1\}, \{1,1,1,0,0\}, \{1,1,1,0,1\}, \{1,1,1,1,0\}, \{1,1,1,1,1\}$$

تذكر ان $\mathcal{S}$ ليس من الضروري ان تكون مغلقة بالنسبة للعملية على $\mathcal{S}$. وهذه الخاصية يجب التحقق منها لأي مجموعة جزئية $\mathcal{S}$ من $\mathcal{S}$.

وتعطينا النظريتان ١٢،٩ الشروط اللازمة لمعرفة متى تكون المجموعة الجزئية من زمرة ما زمرة جزئية . فكل منهما تبين شرطاً واحداً فقط يجب التحقق منه . فالنظرية ٩ تبحث في المجموعات الجزئية المنتهية للزمرة . وهي سهلة التطبيق . حيث انها تحتاج فقط الى ان تكون المجموعة الجزئية مغلقة بالنسبة لعملية الزمرة.

نظرية :

لتكن $(\mathcal{S}, \circ)$ زمرة ولتكن $\mathcal{S}$ مجموعة منتهية وجزئية فعلا في $\mathcal{S}$. فاذا كانت $\mathcal{S}$ مغلقة بالنسبة للعملية $\circ$ فان $\mathcal{S}$ تكون زمرة جزئية من $\mathcal{S}$.

اترك برهان هذه النظرية حتى التمرين ٢،٢ - ٤ . وبالرغم من امكانية برهان النظرية الآن فان البرهان اسهل عندما نستخدم المفهوم المطور في ٢،٢.

لاحظنا في البند ١،٦ انه يمكن تمثيل كل من تماثلات المربع كعنصر في زمرة التبديلات S_n وهكذا تكون D_n المجموعة المكونة من كل هذه التماثلات مجموعة جزئية فعلا من S_n ولحظة على جدول التركيب بالنسبة الى D_n . تبين لنا ان D_n مغلقة بالنسبة للعملية على S_n وتقول النظرية ٩ ان D_n زمرة جزئية من S_n اي ان $(D_n, \circ)$ زمرة (لقد حصلنا على هذه النظرية من قبل بطريقة اكثر تعقيداً).

ولهذا فان D_n تزودنا بمثال على استخدام النظرية ٩ لتسهيل البرهان على ان مجموعة خاصة منتهية وجزئية من زمرة معروفة تكون نفسها زمرة.

مسألة :

استعمل النظرية ٩ لايجاد جميع الزمر الجزئية من Z_n بالنسبة لعملية الجمع لكل $n \in \mathbb{N}$
{٩،٠٠٠،٥،٤} اعمل قائمة للزمر الجزئية هذه لاستخدامها في البند ٢،٣.

مسألة :

بين بمثال انه اذا كانت $\mathcal{S}$ مجموعة غير منتهية وجزئية من زمرة ما وكانت $\mathcal{S}$ مغلقة بالنسبة لعملية الزمرة فليس من الضروري ان تكون $\mathcal{S}$ زمرة جزئية.

والنظرية التالية تذكر شرطاً لأن تكون اي مجموعة جزئية من الزمرة ، زمرة جزئية. فاذا كانت المجموعة لا منتهية فلا يعد كافياً معرفة ان المجموعة مغلقة بالنسبة لعملية الزمرة . فيجب ان نبرهن انها تحتوي على نظائر.

ونتيجة لأليات الزمرة فانه اذا كانت S زمرة جزئية من الزمرة S بالنسبة للعملية $\circ$ وكانت $a, b \in S$ فان $a \circ b \in S$ ومن ثم $a \circ b \in S$. والنظرية ١٢ تعطي عكس هذه العرضية. لاحظ ان النظرية ١٢ صحيحة سواء كانت المجموعة منتهية او غير منتهية.

١٢ مسألة :

اثبت النظرية التالية :

نظرية :

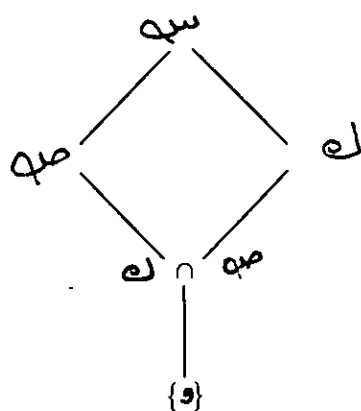
لتكن $(S, \circ)$ زمرة ، S مجموعة غير خالية وجزئية من S . فاذا كان $a \circ b \in S$ لكل $a, b \in S$ Δ S تكون S زمرة جزئية من S .

١٣ مسألة :

اعد نص النظرية ١٢ مستعملا الرموز (٢) لزمرة الضرب. (ب) لزمرة الجمع . ان اعادة هذا النص سهل وسيكون مفيداً في مسائل قادمة.

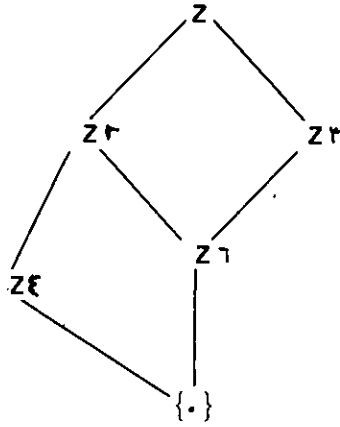
١٤ مسألة :

استعمل النظرية ١٢ لتبرهن انه اذا كانت S و K زمريتين جزئيتين من S فان $K \cap S$ زمرة جزئية من S . ويمكن استعمال مخطط سهمي لاعطاء صورة عن العلاقة بين الزمر الجزئية لأي زمرة . فمثلا اذا كانت S زمرة وكانت S و K زمريتين جزئيتين من S فان $K \cap S$ تكون زمرة جزئية و $K \cap S \subseteq S$ ، $S \cap K \subseteq K$. وليبيان هذه العلاقة نرسم سهمياً كما في الشكل ٢،١.



الشكل ٢،١

وفي زمرة الجمع Z تكون المجموعات $Z^2 = \{z^2 : z \in Z\}$ ، $Z^3 = \{z^3 : z \in Z\}$ ، $Z^4 = \{z^4 : z \in Z\}$ ، $Z^6 = \{z^6 : z \in Z\}$ كلها زمراً جزئية من Z والواقع ان لهذه الزمر الجزئية خاصية وهي ان Z^4 زمرة جزئية من Z^2 و Z^6 زمرة جزئية لكل من Z^2 و Z^3 (لاحظ ان $Z^3 \cap Z^2 = Z^6$) وتبين هذه العلاقة في الشكل ٢,٢



الشكل ٢,٢

لاحظ في الشكل ان زمرة $\{0\}$ تقع اسفل زمرة $\{0\}$ وتتصل بها بقطعة مستقيمة او اكثر اذا وفقط اذا كانت $\{0\}$ زمرة جزئية من $\{0\}$. ويحتوي المخطط السهمي على الزمرة $\{0\}$ في الاعلى والزمرة الجزئية $\{0\}$ في الاسفل.

مسألة :

ارسم مخططاً سهمياً لزمرة Z الجزئية.

تمارين :

١. جد عدة زمر جزئية من Z في كل منها ستة عناصر.
٢. عرف عملية $\circ$ للمجموعة $\{0, 1, -1\}$ باستعمال الجدول ٢,١.
٣. اثبت ان $(\{0, 1, -1\}, \circ)$ تكون زمرة.
- ب. هل $(\{0, 1, -1\}, \circ)$ زمرة جزئية من $(Z, +)$ ؟

١-	١	٠	٥
١-	١	٠	٠
٠	١-	١	١
١	٠	١-	١-

جدول ٢,١

٣. اذا كانت ك زمرة جزئية من V و V زمرة جزئية من S فهل من الضروري ان تكون ك زمرة جزئية من S ؟ لماذا ؟

٤. برهن العبارة التالية او اذكر مثالا عكسياً ينقضها :

اذا كانت V و U زميرتين جزئيتين من S فان $U \cap V$ تكون زمرة جزئية من S .

٥. يكون المستوى الديكارتي $R \times R = {}^2R$ زمرة بالنسبة لعملية الجمع المعرفة بالصيغة $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$.

ارسم مخططاً بيانياً لكل من المجموعات التالية في المستوى ، وبين هل كل من هذه المجموعات زمرة جزئية ام لا . علل اجاباتك.

أ. $\{(s, s) : s = t + s\}$ ، حيث $a, b \in R - \{0\}$ ثابتان.

ب. $\{(s, s) : s = t\}$ ، حيث $a \in R - \{0\}$ ثابت.

ج. $\{(s, s) : s \in Z\}$

د. $\{(s, s) : s = 0\}$

هـ. $\{(s, s) : s \in Z\}$

٦. لتكن

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in R \right\}$$

هي المجموعة المكونة من كل المصفوفات القطرية 2×2 .

باستعمال النظرية ١٢ برهن ان R زمرة جزئية من $M_2(R)$ بالنسبة للجمع . هل R زمرة ابدالية ؟ لماذا ؟

٧. برهن او انف ان المجموعة

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in R, a \neq 0 \right\}$$

زمرة جزئية من زمرة ضرب $M_2(R)$ المكونة من المصفوفات 2×2 غير المنفردة، هل ضرب تبديلي في R ؟

٨. برهن او انف ان المجموعة $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in R, a \neq 0 \right\}$ المكونة من

المصفوفات المثلثية العليا تكون زمرة تبديلية جزئية من $M_2(R)$ بالنسبة للجمع .

$$9. \text{ برهن او انف ان المجموعة } E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} : a, b, c, d, p, R \text{ و } 0 \neq \right\}$$

• زمرة جزئية من زمرة الضرب ل المكونة من المصفوفات 2×2 غير المنفردة

هل الضرب تبديلي في E_1 ؟

١٠ اكمل العرضية التالية وبرهنها : لتكن $S \equiv R$,

$$\text{ولتكن } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} : a, b, c, d, p, R \text{ و } 0 \neq$$

فتكون M زمرة جزئية من M (R) بالنسبة للجمع اذا فقط اذا كان

١١ * لقد بينت في المسألة ٢ ان اي مجموعة جزئية من Z لها الصيغة $\{Z \ni n : n \in \mathbb{Z}\}$ حيث n عدد صحيح ثابت تكون زمرة جزئية من Z بالنسبة للجمع.

برهن انه لا يوجد زمرة جزئية اخرى من Z . وبالتحديد برهن انه اذا كانت M زمرة جزئية من Z بالنسبة للجمع و $M \neq \{0\}$, فهناك عدد صحيح $n > 0$ بحيث ان $M = \{nZ\}$.

١٢ ا. ارسم مخططاً سهمياً مبيناً كل الزمر الجزئية من زمرة الجمع $\mathbb{Z}$.

ب. ارسم مخططاً سهمياً مبيناً كل الزمر الجزئية من زمرة الجمع $\mathbb{Z}$.

١٣ ارسم جزءاً من مخطط سهمي لزمرة الجمع $\mathbb{Z}$ محتوياً على جميع الزمر الجزئية $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \dots, \mathbb{Z}_{12}$.

١٤ * ليكن M و N عددين صحيحين موجبين . ففي زمرة الجمع $\mathbb{Z}$ تكون $M \cap N = \{M \ni n : n \in \mathbb{Z}\}$

زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$ اذا فقط اذا كان

اكمل العبارة بوضع شرط على M و N وبرهنها بعد ذلك.

١٥ ا. في زمرة الجمع $\mathbb{Z}$ أوجد $M \cap N \cap Z$ لعدة ازواج مختلفة من الاعداد الصحيحة الموجبة M و N .

ب. اذا كان M و N عددين صحيحين موجبين اختياريين , فاوجد الزمرة الجزئية $M \cap N \cap Z$

وبرهن صحة اجابتك. تذكر انها يجب ان تكون بنفس الصيغة مثل $M \cap Z$ و $N \cap Z$.

ج. برهن ان تقاطع زمرتين جزئيتين فعلا من $\mathbb{Z}$ تكون زمرة جزئية فعلا.

١٦ اذا كانت $(S, +)$ زمرة تبديلية لها زمرتان جزئيتان M و K , عرف $M + K$ بأنها المجموعة :

$$M + K = \{m + k : m \in M, k \in K\}$$

فيكون $M + K$ تحتوي على كل المجاميع $m + k$ الممكنة حيث $m \in M, k \in K$.

١. برهن ان $\text{سم} + \text{ك}$ تكون زمرة جزئية من سم .
 في زمرة الجمع $\mathbb{Z}$ أوجد $\text{م} + \mathbb{Z}$ لعدة ازواج مختلفة من الاعداد الصحيحة الموجبة م و ن .
 حـ اذا كانت م و ن عددين صحيحين موجبين اختياريين ، فان $\text{م} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ حيث $\mathbb{Z}$ ل عدد ما صحيح.
 اوجد ل بدلالة م و ن وبرهن صحة اجابتك. ●
 في الزمرة $\mathbb{Z}$ تسمى المتتالية اللانهائية من الزمر الجزئية
 $2\mathbb{Z} \subseteq 4\mathbb{Z} \subseteq 8\mathbb{Z} \subseteq 16\mathbb{Z} \subseteq \dots$ سلسلة متناقصة.
 أوجد سلسلة متناقصة في $\mathbb{Z}$ تحتوي على الزمرة الجزئية ك ، حيث ك اي عدد صحيح موجب.

٢,٢ رتب العناصر

ان احدى الطرق الطبيعية للبدء ببناء زمرة جزئية هي اختار عنصر ف و في الزمرة ثم اخذ جميع تركيبات 2ف ، (2ف) ، 4ف ، وهكذا. ومن الممكن ان تكون قد استعملت هذه الطريقة لا شعورياً لايجاد الزمر الجزئية من $\mathbb{Z}$ او من $\mathbb{Z}_n$ حيث $n = 9,000,05,4$. ولتسهيل هذه الطريقة نحتاج الى بعض الرموز والمصطلحات.

تعريف :

تعرف المضاعفات العددية للعنصر ف حيث $\text{سم} \in \text{سم}$ (+ ، سم) زمرة جمع بوضع

$$0 = (0) \cdot (0)$$

$$1 = (1) \cdot (1)$$

$$(n) \cdot (1-n) = (1-n) + 1 \text{ حيث } n = 2, 3, \dots$$

$$(-n) \cdot (1-n) = (1-n) \text{ حيث } n = 1, 2, 3, \dots$$

فحوى التعريف ١٦ أن $1 + 1 = 2$ ، $1 + 2 = 3$ ، $2 + 2 = 4$ ، وهكذا . لاحظ

انه اذا كانت سم مجموعة من الاعداد الحقيقية فيكون المضاعف العبدى هو الضرب العادي لعدد حقيقي بعدد صحيح. وامتداداً للخصائص المألوفة للاعداد الحقيقية نحصل على العرضية التالية :

عرضية :

لتكن $(\text{سم} +)$ زمرة . فلكل $\text{ف} \in \text{سم}$ ولكل زوج م ، $\text{ن} \in \mathbb{Z}$ يكون

$$m + n = \text{ــــــــــــــــــــــــــــــــ}$$

$$m(n) = p(mn).$$

اترك برهان هذه العرضية كوظيفة بيئية .

وكما عرفت المضاعف العددي لزمرة الجمع . يمكن تعريف القوى الصحيحة لزمرة مثل

$$(R, \cdot) \text{ أو } (S, \cdot) \text{ حيث تكون عملياتها ليست جمعاً.}$$

تعريف :

تعرف القوى الصحيحة لعنصر $a \in S$ حيث $(S, \cdot)$ زمرة غير تبديلية بوضع

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^2 = a \cdot a, a^3 = a \cdot a \cdot a, \dots$$

$$a^{-1} = (a^1)^{-1} \text{ حيث } 1 = a^0, a^{-2} = (a^2)^{-1}, \dots$$

ونتيجة للتعريف ١٨ نحصل على ان $a^2 = a \cdot a = 2a, a^3 = a \cdot a \cdot a = 3a, \dots$ وهكذا ففي زمرة الضرب

$$R - \{0\}, \quad \frac{1}{a} = {}^2\left(\frac{1}{a}\right) = {}^2\bar{a}$$

وتسهيلاً لحساباتنا بقوى مختلفة لنفس العنصر ، نحتاج للعرضية التالية :

عرضية :

إذا كانت $(S, \cdot)$ زمرة وكان $a \in S$ فان لكل $m, n \in Z$

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

اترك برهان هذه العرضية للتمرين ٣.

ربما لاحظت خلال عملك مع الزمر مثل $(D_4, \cdot)$ تماثلات المربع ، Z ان لكل عنصر من الزمرة قوة أو مضاعفاً يساوي وحدة الزمرة. فمثلاً في S_3 نجد ان التبديلة

$$t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

لها الخاصية ان $t^2 = 1$ و $t^3 = t$ وهكذا

ولكن $t^1 \neq 1$ وكذلك $t^2 \neq 1$ وبالمثل ، في $Z_8 : (4) \cdot (4) = 8^* = (8) \cdot (8) = (16) \cdot (16) = 1$ وهكذا

ولكن $(1) \cdot (8) = (8) \cdot (2) = (16) \cdot (2) = 8^*$ وكلها مختلفة عن 8^* .

ويعطي للعديدين الصحيحين ٣

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \text{في ت}$$

و ٤ في ٨ اسم خاص ، يدل عليه التعريف التالي:

تعريف :

١. لتكن $(\mathcal{S}, +)$ زمرة جمع . ان رتبة عنصر $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ هي اقل عدد صحيح موجب n يحقق $\mathcal{P}^n = 0$ ، واذا كانت $\mathcal{P} \neq 0$ لكل عدد صحيح موجب m فللعنصر $\mathcal{P}$ رتبة لا نهائية.

ب. لتكن $(\mathcal{S}, +)$ زمرة ليست ابدالية . ان رتبة عنصر $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ هي اقل عدد صحيح موجب n يحقق $\mathcal{P}^n = 0$ و واذا كانت $\mathcal{P}^m \neq 0$ لكل عدد صحيح موجب m فللعنصر $\mathcal{P}$ رتبة لا نهائية.

ولكي تجد رتبة عنصر مثل $\mathcal{A}^2$ الموجودة في زمرة الجمع $\mathcal{Z}$ فاحسب المضاعفات المتتالية ،
 $(1) \cdot (\mathcal{A}^2) , (2) \cdot (\mathcal{A}^2) , (3) \cdot (\mathcal{A}^2)$ وهكذا . حتى تحصل على المضاعف المطلوب الذي يكون مساوياً $\mathcal{A}^2$.

وبما ان $\mathcal{A}^2 = (\mathcal{A}^2) \cdot (4)$ في حين ان $(1) \cdot (\mathcal{A}^2) , (2) \cdot (\mathcal{A}^2)$ و $(3) \cdot (\mathcal{A}^2)$ كلها مختلفة عن $\mathcal{A}^2$ ، لذا تكون رتبة $\mathcal{A}^2$ هي ٤.

وبالمثل فلإيجاد رتبة u في D فاحسب القوى المتتالية u, u^2, u^3, u^4 ، وهكذا . وبما ان $u^4 = 0$ وكذلك $u^3 \neq 0$ فتكون رتبة u هي الثانية

مسألة :

- جد رتبة كل عنصر في $\mathcal{Z}$. جد رتبة عنصرين مغايرين للصفر في $\mathcal{Z}$.
- جد رتبة كل عنصر في الزمرة D المكونة من تماثلات المربع.
- جد رتبة عنصرين مغايرين للصفر من زمرة الجمع $\mathcal{Z}$.

في البند ١ ، ٢. لعلك كونت الزمر الجزئية من $\mathcal{Z}$ باختيار عنصر ما $\mathcal{P} \in \mathcal{Z}$ واخذ كل المضاعفات لهذا العنصر : $\mathcal{P}, \mathcal{P}^2, \mathcal{P}^3$ وهكذا. تستخدم رمزاً خاصاً لهذا النوع من المجموعات ونعطيه اسماً خاصاً كما ترينا التعريفات التالية.

تعريف :

لتكن $(\mathcal{S}, +)$ زمرة جمع . وليكن للعنصر $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ رتبة منتهية n .

نعرف $\langle \mathcal{P} \rangle$ بأنه المجموعة المكونة من كل المضاعفات $\mathcal{P}^r$ $(r \in \mathcal{Z})$ للعنصر $\mathcal{P}$:

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \{ \mathcal{P}^r : r \in \mathcal{Z} \} = \{ \mathcal{P}^0, \mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2, \dots, \mathcal{P}^{n-1} \}$$

واذا لم تكن $(\mathcal{S}, +)$ زمرة جمع ، فتكون $\langle \mathcal{P} \rangle$ هي المجموعة المكونة من كل القوى $\mathcal{P}^r$ $(r \in \mathcal{Z})$ للعنصر $\mathcal{P}$:

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \{ \mathcal{P}^r : r \in \mathcal{Z} \} = \{ \mathcal{P}^0, \mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2, \mathcal{P}^3, \dots \}$$

مسألة :

- أ. في D اوجد كل العناصر في $\langle 2, 4 \rangle$ ، في $\langle 10 \rangle$.
 ب. في الزمرة Z_7 اوجد المجموعات $\langle 1 \rangle$ ، $\langle 2 \rangle$ ، $\langle 3 \rangle$ ، $\langle 4 \rangle$ ، $\langle 5 \rangle$ ، $\langle 6 \rangle$.

مسألة :

- أ. لتكن (ϕ, ψ) زمرة ϕ و ψ . فإذا كانت رتبة العنصر ϕ هي n ، فكم عنصراً مختلفاً موجوداً في $\langle \phi \rangle$ ؟ اكتب قائمة بهذه العناصر .
 ب. لتكن (ϕ, ψ) زمرة ϕ و ψ عنصراً له رتبة منتهية n برهن ان $\langle \phi \rangle$ زمرة تبديلية جزئية من ϕ . استعمل النظرية ٩ في برهانك .

تعريف :

لتكن (ϕ, ψ) زمرة وليكن $\phi \in \psi$ عنصراً له رتبة منتهية n ، فتسمى $\langle \phi \rangle$ الزمرة الدورية الجزئية المتولدة من العنصر ϕ .

تمارين :

- ١ - جد رتبة كل عنصر في $\mathbb{Z}_{18}$.
- ٢ - ليكن ϕ عنصراً في زمرة الجمع $\mathbb{Z}_n$ وليكن r عدداً صحيحاً موجباً رأينا ان $r\phi = (r\phi)_n$ (التمرين ١، ٨-٣) .

أ. استعمل هذه الحقيقة لايجاد رتبة كل من العناصر الموجودة في $\mathbb{Z}_n$.
 ب. جد رتبة كل من العناصر التالية :

$$\phi_{18} \in \mathbb{Z}_{18}, \phi_{10} \in \mathbb{Z}_{10}, \phi_{12} \in \mathbb{Z}_{12}$$

- ٣ - برهن العرضية ١٩. ما هي التغيرات الضرورية لكي تحصل على برهان العرضية ١٧ .
- ٤ - برهن النظرية ٩. أي برهن انه اذا كانت (ϕ, ψ) زمرة و ϕ مجموعة منتهية غير خالية وجزئية من ψ وكانت ϕ مغلقة بالنسبة للعملية ψ ، فان ϕ زمرة جزئية من ψ . ربما ترغب في اختيار عنصر ما ϕ ، من المجموعة المنتهية الجزئية ϕ واعتبار القوى $\phi^2, \phi^3, \dots, \phi^{24}$.

- ٥ - أ. اكتب كلا من الزمر الجزئية في $\mathbb{Z}$ بالصيغة $\langle \phi \rangle$ ، حيث ϕ عنصراً ما $\phi \in \mathbb{Z}$.
 ب. اختر زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$ رتبها ستة واكتبها بالصيغة $\langle \phi \rangle$ حيث $\phi \in \mathbb{Z}$. جد رتبة كل عنصر ϕ في هذه الزمرة الجزئية . ما العلاقة بين رتبة ϕ ورتبة ϕ^2 ؟

- ٦ - بين ان لكل زمرة منتهية وغير تبديلية زمرة تبديلية جزئية تختلف عن $\{0\}$.
 *٧ - لتكن (ϕ, ψ) زمرة ولتكن $\phi \in \psi$ ، ب $\phi \in \psi$.

- أ. برهن ان رتبة ϕ تساوي رتبة ϕ^2 .
 ب. برهن ان رتبة ϕ^2 تساوي رتبة ϕ^3 .

٨- إذا كانت (س، هـ) زمرة وكانت رتبة $\exists^2$ س هـ منتهية وتساوي ن وكان ر عدداً صحيحاً يحقق $\hat{p} = 9$ ، اثبت ان ن | ر.

٩- إذا كانت (س، هـ) زمرة ، وكانت رتبة $\exists^2$ س هـ منتهية وتساوي ن وكان ر عدداً صحيحاً :
 أ. بين انه اذا كان $1 \leq r \leq n$ فان نظير $\hat{p}$ يساوي $\hat{p}$ مرفوعاً لقوة موجبة : $(\hat{p})^r = \hat{p}^r$

حيث س عدد صحيح موجب . وبالمثل ، في زمرة الجمع فان - (ر) يساوي احدى مضاعفات $\hat{p}$ الموجبة . (ربما ترغب في النظر في بضعة امثلة اولاً)

ب. استعمل خوارزمية القسمة في اثبات انه اذا كانت $r \leq n$ فان $\hat{p}^r = \hat{p}$ حيث $l \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

واثبت بعد ذلك ان نظير $\hat{p}$ يساوي $\hat{p}$ مرفوعة لقوة غير سالبة . وبالمثل ، في زمرة الجمع ، يكون $\hat{p}^l = \hat{p}$

حيث $l \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ و - (ر) تساوي احدى المضاعفات غير السالبة للعنصر $\hat{p}$.

$$\text{ح. بين ان } \langle \hat{p} \rangle = \{ \hat{p}^r : r \in \mathbb{Z} \} = \{ \hat{p}^r : r \in \mathbb{Z}^+ \} = \{ \hat{p}^r : r \in \mathbb{Z}^+ \}$$

ولهذا اذا كان للعنصر $\hat{p}$ رتبة منتهية ن فتكون المجموعة المكونة من كل قوى $\hat{p}$ هي نفس المجموعة المكونة من كل القوى الموجبة للعنصر $\hat{p}$.

وتصح نتيجة مشابهة لهذه في حالة زمر الجمع.

١٠- اثبت بالحساب المباشر انه يمكن كتابة كل عنصر $\exists^2$ كحاصل جمع عنصرين $\exists^2$ و $\exists^2$ بحيث ان للعنصر $\exists^2$ رتبة تقبل القسمة على ٣ وللعنصر $\exists^2$ رتبة تقبل القسمة على ٤ . ما العلاقة بين رتب $\exists^2$ ، $\exists^2$ و $\exists^2$ ؟

١١- لتكن (س، هـ) زمرة تبديلية وليكن ب عنصراً من س هـ رتبته م . اثبت انه اذا كان م ، ن عددين اوليين نسبياً (القاسم المشترك الاعظم للعددين م ، ن يساوي ١) ، فانه يوجد $\exists^2$ ، $\exists^2$ بحيث ان رتبة ب تساوي م ورتبة $\exists^2$ تساوي ن ، $\exists^2 = \exists^2$.

ب. أوجد مثالا في $\mathbb{Z}$ لعنصر $\exists^2$ رتبته ٤ ويمكن التعبير عنه بحاصل جمع عناصر رتبة كل منها ٢.

ح. لتكن س هـ زمرة تبديلية ، $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_r$ أعداداً أولية مختلفة ح، ح، ... ، ح $\exists^2$. اثبت انه اذا كان للعنصر $\exists^2$ رتبة $\hat{p}_1 \hat{p}_2 \dots \hat{p}_r$ فيوجد $\exists^2$ ، $\exists^2$ ، ... ، $\exists^2$ بحيث ان $\exists^2 = \exists^2 \dots \exists^2$ ورتبة $\exists^2$ تساوي ن .

١٢* - لتكن S زمرة تبديلية وليكن P عدداً اولياً و V_P المجموعة المكونة من كل العناصر في S والتي تكون رتبها قوى غير سالبة للعدد P .

١. في زمرة الجمع Z أوجد كل العناصر من V_P : رتبة P تساوي 2 ، $\{Z \ni 2, 4, 6, \dots\}$
 V_P : رتبة P تساوي 3 ، $\{Z \ni 3, 6, 9, \dots\}$

ب. بين انه اذا كانت S زمرة تبديلية فتكون V_P زمرة جزئية من S .
 ١٣ للتحدي . لتكن $(S, \circ)$ زمرة و $P \in S$ رتبته n ، ولتكن $\langle P \rangle$ حيث ان $P = P^n$ (س) $\langle P \rangle$.

٢. جد رتبة P . علل اجابتك .
 ب. جد الشروط اللازمة والكافية على S و P حتى تكون $\langle P \rangle = S$ اي ان تكون الزمرة المتولدة من P هي الزمرة المتولدة من S .

٢,٣ نظرية لاجرانج والمجموعات المرافقة

رأينا ان لكل زمرة $S \neq \{e\}$ زمرتين جزئيتين على الاقل ، الزمرتين الجزئيتين المعروفتين $\{e\}$ ، S ودرسنا الشروط التي تساعدنا على تعيين متى تكون مجموعة جزئية من زمرة هي نفسها زمرة . وربما يكون هناك شروط السعة الزمرة الجزئية تساعدنا في استبعاد مجموعات معينة من الزمر الجزئية. مثلاً اذا احتوت مجموعة جزئية من S على ثلاثة عناصر ، فهل من الممكن ان تكون زمرة جزئية ؟ هل من الممكن لمجموعة جزئية مكونة من خمسة عناصر ان تكون زمرة جزئية من S ؟
 وستجيب النظرية الرئيسية في هذا البند أعني نظرية لاجرانج ، على هذه الاسئلة .

تعريف :

رتبة الزمرة (او الزمرة الجزئية) S هي عدد العناصر الموجودة في S . ان احدي النتائج الاساسية في نظرية الزمر تكمن في العلاقة بين رتبة الزمر المنتهية ورتبة كل من زمريها الجزئية . وستساعدك المسألة التالية على اكتشاف تلك العلاقة.

مسألة :

ارجع الى قائمتك للزمر الجزئية لـ Z_n حيث $n = 4, 5, 10, \dots$ (بند ٢,١) قارن رتبة الزمرة Z_n حيث $n = 4, 5, 10, \dots$ مع رتبة كل من زمريها الجزئية.

مسألة :

اذكر نظرية تعطي العلاقة بين رتبة زمرة منتهية S_n ورتبة زمرة جزئية اختيارية من S_n .

نظرية :

إذا كانت H زمرة جزئية من زمرة منتهية S_n فان _____ من المحتمل ان تكون قد ذكرت نتيجة تعرف باسم نظرية لاجرانج . دققها مع مدرسك . ان التعريف والمسائل التالية تقودنا الى برهانها .

تعريف :

لتكن $(S_n, \circ)$ زمرة ، H اي زمرة جزئية من S_n و $P \subseteq S_n$. تعرف المجموعة المرافقة اليمنى H^P للزمرة الجزئية H في S_n بالمجموعة

$$H^P = \{h \circ P : h \in H\}$$

لاحظ ان H^P هي المجموعة المكونة من كل العناصر H^P حيث P ثابت و S_n يتغير خلال الزمرة الجزئية H .

في زمرة الضرب $(S_n, \circ)$ تكتب المجموعة المرافقة اليمنى بالصيغة $H^P = \{h \circ P : h \in H\}$ وفي زمرة الجمع $(S_n, +)$ تكتب المجموعة المرافقة اليمنى بالصيغة

$$H + P = \{h + P : h \in H\}$$

انظر الزمرة الجزئية $\{1, 2\}$ من زمرة الجمع Z . تتكون المجموعة المرافقة اليمنى $1 + Z$ من كل العناصر التي صيغتها

$$1 + Z = \{1 + 2k : k \in Z\} = \{\dots, -1, 1, 3, \dots\}$$

مسألة :

لكل $P \subseteq S_n$ أوجد جميع العناصر الموجودة في المجموعة المرافقة اليمنى $P + 1$ حيث $H = \{1, 2\}$. اعمل ذلك بشكل منتظم اولا بايجاد جميع العناصر الموجودة في المجموعة المرافقة $1 + Z$ وبعد ذلك جد جميع العناصر الموجودة في المجموعة المرافقة $1 + Z$ ، وهكذا . ثم اجب على الاسئلة التالية :

أ. هل $1 + Z$ زمرة جزئية من Z لكل $P \subseteq S_n$ ؟

ب. هل كل عنصر من Z موجود في احدى المجموعات المرافقة اليمنى ؟

ج. هل يمكن لعنصرين مختلفين من Z تعيين نفس المجموعة المرافقة اليمنى ؟ وبكلمات اخرى ، هل يمكن ان تكون $P \neq Q$ في Z ولكن

$$P + 1 = Q + 1$$

د. هل يكون لمجموعتين مرافقتين يمينيتين مختلفتين اي عناصر مشتركة ؟

- هـ. ما عدد المجموعات المرافقة اليمنى المختلفة للزمر الجزئية $\mathcal{H}$ ؟
 و. كم عدد العناصر الموجودة في كل مجموعة مرافقة يمنى ؟
 ز. جد علاقة بين رتبة الزمرة Z ورتبة الزمرة الجزئية $\mathcal{H}$ وعدد المجموعات المرافقة اليمنى المختلفة لـ $\mathcal{H}$.

التمهيدية التالية صحيحة سواء كانت الزمرة $\mathcal{H}$ منتهية او غير منتهية. في برهان اي عبارة في التمهيدية ، تذكر انك تستطيع استعمال عبارة تسبقها .

مسألة :

برهن التمهيدية التالية :

تمهيدية :

لتكن $(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ زمرة و $\mathcal{H}$ زمرة جزئية من $\mathcal{H}$.

١. ان الزمرة الجزئية $\mathcal{H}$ مجموعة مرافقة يمنى لنفسها (اي انه يوجد عنصر $\mathcal{H} \ni \mathcal{H}$ بحيث أن $\mathcal{H} = \mathcal{H}$).

ب. كل عنصر $\mathcal{H} \ni \mathcal{H}$ هو عنصر في المجموعة المرافقة اليمنى $\mathcal{H}$ (وهذا يبين ان كل عنصر $\mathcal{H}$ في $\mathcal{H}$ ينتمي الى احدى المجموعات المرافقة اليمنى لـ $\mathcal{H}$ وهي $\mathcal{H}$).

جـ. اذا كانت $\mathcal{H} \ni \mathcal{H}$ فان $\mathcal{H} = \mathcal{H}$ ▲

د. اذا كان $\mathcal{H} \ni \mathcal{H} \neq \mathcal{H}$ فان $\mathcal{H} = \mathcal{H}$ ▲

هـ. اذا كانت $\mathcal{H} \ni \mathcal{H} \neq \mathcal{H}$ فان $\mathcal{H} \cap \mathcal{H} = \emptyset$.

(وتبين هذه النتيجة انه لا يوجد لاي مجموعتين مرافقتين يمينيين مختلفتين لـ $\mathcal{H}$ اي عناصر مشتركة . ولهذا فان كل مجموعتين مرافقتين يمينيين لـ $\mathcal{H}$ تكونان متساويتين او منفصلتين).

تكون المجموعات المرافقة اليمنى المختلفة لـ $\mathcal{H}$ تجزئة للزمرة $\mathcal{H}$. (التجزئة هي عائلة من مجموعات جزئية من $\mathcal{H}$ منفصلة كل عن الأخرى واتحاد كل هذه المجموعات الجزئية يساوي $\mathcal{H}$).

ز. اذا كانت $\mathcal{H}$ زمرة جزئية منتهية تحتوي على k من العناصر ، فيكون عدد العناصر الموجودة في اي مجموعة مرافقة يمنى لـ $\mathcal{H}$ هو ————— ونحن الآن جاهزون لبرهنة نظرية لاجرانج.

مسألة :

برهنة نظرية لاجرانج باستعمال التمهيدية ٣١. وفي برهانك اجعل n ترمز الى رتبة الزمرة المنتهية $\mathcal{H}$ ، k الى رتبة الزمرة الجزئية $\mathcal{H}$ ، و m الى عدد المجموعات المرافقة المختلفة اليمنى لـ $\mathcal{H}$ في $\mathcal{H}$.

تعريف :

عدد المجموعات اليمنى المرافقة المختلفة للزمرة الجزئية S من الزمرة S يسمى دليل S في S .

مسألة :

اكتب صيغة تعبر عن دليل زمرة جزئية S بدلالة رتبة S ورتبة S (انظر مسألة ٣٢).

ان نظرية لاجرانج لا تضمن ان اي زمرة منتهية رتبتهان لها فعلا زمرة جزئية برتبة معينة ففي التمرين ١٤ مثال على زمرة رتبته اثني عشر وليس لها زمرة جزئية من الرتبة ستة . وبذا فان عكس نظرية لاجرانج ليس صحيحاً . في البند ٢،٢ عرفنا رتبة العنصر ودرسنا الزمر الجزئية المتولدة من عنصر ذي رتبة منتهية . وتبين النظرية التالية العلاقة بين رتبة العنصر ورتبة الزمرة التي يولدها.

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

ان رتبة اي عنصر P في زمرة منتهية تساوي رتبة الزمرة الجزئية $\langle P \rangle$ المتولدة من هذا العنصر ورتبة P تقسم رتبة الزمرة . ▲

في برهاننا لنظرية لاجرانج استعملنا فقط المجموعة المرافقة اليمنى للزمرة الجزئية . فلندرس الآن باختصار المجموعات المرافقة اليسرى للزمرة الجزئية.

تعريف :

لتكن $(S, \circ)$ زمرة . ولتكن S زمرة جزئية من S ولنفرض ان $P \in S$. فالمجموعة المرافقة اليسرى $P \circ S$ هي المجموعة
$$P \circ S = \{ P \circ s : s \in S \}$$

ويمكن برهنة صيغ مقابلة لكل العبارات الواردة في التمهيدية ٣١ عن المجموعات المرافقة اليسرى للزمرة الجزئية S . فاذا كانت S زمرة جزئية من الزمرة S وكان للزمرة S دليل منته في S ، فيكون عدد المجموعات المرافقة اليمنى لـ S مساوياً لعدد المجموعات المرافقة اليسرى لـ S . (وهذه الحقيقة مبرهنة في التمرين ٧).

مسألة :

في زمرة تماثلات المربع D ، لتكن S الزمرة الجزئية $\{ \sigma, \tau \}$ جد عنصراً ما $P \in D$ يحقق $P^2 \neq S$. يبين هذا المثال ان المجموعات المرافقة اليمنى لزمرة جزئية S ليس من الضروري ان تكون هي نفس المجموعات المرافقة اليسرى لـ S .

مسألة :

برهن العرضية : اذا كانت صه زمرة جزئية للزمرة سه وكانت سه تبديلية فان :
 $\text{صه}^2 = \text{صه} \circ \text{هه} \text{ لكل } \text{هه} \in \text{سه}$

تمارين :

- ١ - اثبت ان كل زمرة رتبته عدد اولي ليس لها زمر جزئية فعلا.
- ٢ - جد كل الزمر الجزئية لزمرة تماثلات المربع D_4 .
 هنالك عشر من هذه الزمر الجزئية ، بعضها لا تتولد عن عنصر واحد ، وانما تنشأ عن عنصرين على الاقل (وقواهما).
- ٣* - نحتاج في عملنا القادم الى تحليل المجموعات المرافقة لعدة زمر جزئية من الزمرة D_4 المكونة من تماثلات المربع .
 ا) احسب كل المجموعات المرافقة اليمنى والمجموعات المرافقة اليسرى للزمرة الجزئية $\{u, v\}$ وسجل نتائجك في الجدول ٢,٢ . ان المدخلة المعطاة في الجدول هي المجموعة المرافقة اليمنى.

$$\{u, v\} = \{u, v, w, \delta\}$$

δ_2	δ_1	u	v	ρ_2	ρ_1	ρ	e	
								المجموعات المرافقة
								اليمنى لـ $\{u, v\}$
								الجدول ٢,٢
								المجموعات المرافقة اليسرى لـ
								$\{u, v\}$

- ب. اعمل جدولا يشمل جميع المجموعات المرافقة للزمرة الجزئية $\{u, v\}$
- ح. اعمل جدولا يشمل جميع المجموعات المرافقة للزمرة الجزئية $\{u, \delta\}$

- ٤ - اوجد كل الزمر الجزئية لـ S_4 وضعها في مخطط سهمي .
- ٥ - ا) اختر زمرة جزئية صه ربتها ٢ في S_4 وعين المجموعات المرافقة اليسرى واليمنى لـ صه .
 ب. كرر الجزء ١ بزمرة جزئية ربتها ثلاثة في S_4 .
- ٦ - لتكن سه زمرة ، صه زمرة جزئية من سه ، ا ، ب $\in$ صه
 ا) أثبت ان $\text{صه}^2 \cap \text{صه} = \text{هه}$ اذا وفقط اذا كانت $\text{هه} \in \text{صه}$. ولهذا فان
 $\text{صه}^2 = \text{هه}$ اذا وفقط اذا كان $\text{هه} \in \text{صه}$ لماذا؟

- ب. اثبت ان $\exists^p \text{صه}^p \text{ب}$ اذا وفقط اذا كان $\exists^p \text{ب} \text{صه}^p$. ولهذا فان
 $\text{صه}^p = \text{صه}^p \text{ب} \text{اذا وفقط اذا كان } \exists^p \text{ب} \text{صه}^p$. لماذا؟
- ح. اثبت ان $\exists^p \text{ص} = \text{ب} \text{ص} \text{اذا وفقط اذا كان } \text{صه}^p = \text{صه}^p \text{ب}$
٧. لتكن صه زمرة (منتهية او غير منتهية) ولتكن صه زمرة جزئية من صه لها دليل منته ك .
 ولهذا تكون صه زمرة جزئية من صه ولها ك من المجموعات المرافقة اليمنى المختلفة في صه .
 استعمل التمرين ٦ لبرهنة انه يوجد بالضبط ك من المجموعات المرافقة اليسرى المختلفة
 لـ صه في صه . يثبت هذا بشكل خاص انه اذا كان الدليل لزمرة جزئية منتهياً (مثلاً : في
 زمرة جزئية من زمرة منتهية) ، فان عدد المجموعات المرافقة اليسرى يساوي عدد
 المجموعات المرافقة اليمنى للزمرة الجزئية.
٨. * لتكن $(\text{صه}, \text{صه})$ زمرة تبديلية منتهية ، ولتكن رتبة كل من صه ، $\text{ب} \text{صه} \text{م و ن على الترتيب}$.
 اثبت انه اذا كان م و ن عددين اوليين نسبياً (القاسم المشترك الاعظم للعددين م و ن ،
 يساوي ١) فان رتبة العنصر $\text{صه}^p \text{ب}$ تساوي م و ن .
٩. لتكن صه زمرة و صه زمرة جزئية من صه . عرف علاقة على صه وذلك بان تذكر ان $\text{صه} \sim \text{ب}$
 اذا وفقط اذا كان $\text{ب} \in \text{صه}^p \text{صه}$.
 $\text{صه}^p \text{ب}$ برهن ان $\sim$ هي علاقة تكافؤ على صه .
- ب. لتكن $\text{صه}^p \text{ب}$. برهن ان صف التكافؤ $[\text{صه}^p \text{ب}] = \{ \text{س} : \text{س} \in \text{صه}^p \text{ب} , \text{س} \sim \text{صه}^p \text{ب} \}$ يكون
 مساوياً للمجموعة المرافقة اليمنى $\text{صه}^p \text{ب}$.
- ح. لتكن صه زمرة الجمع Z ولتكن $\text{صه} = Z \cap \text{صه}^p \text{ب}$. فيكون الشرط $\text{صه}^p \text{ب} \in \text{صه}$
 صه هو بالضبط الشرط $\text{صه}^p \text{ب} = \text{ن ر لعدد ما } \text{صه}^p \text{ب}$.
 بين ان $\text{صه}^p \text{ب}$ حيث $\text{صه}^p \text{ب} \in Z$ اذا وفقط اذا كان $\text{صه}^p \text{ب} \equiv \text{ب} \text{ (مض ن)}$.
 وبعد ذلك اثبت ان صف التكافؤ $[\text{صه}^p \text{ب}]$ هو الصف
 $\text{صه}^p \text{ب} = \{ \text{س} : \text{س} \in Z , \text{صه}^p \text{ب} \equiv \text{س} \text{ (مض ن)} \}$. ومن ثم فالمجموعة المكونة من المجموعات
 المرافقة (المختلفة) اليمنى لـ $\text{صه}^p \text{ب}$ في Z هي الزمرة Z . وضح هذه النتيجة عندما
 تكون $\text{ن} = ٥$.
١٠. في هندسة التحويلات تدرس اقترانات تسمى الانسحابات . ويعرف الانسحاب
 $\phi : Z \leftarrow Z$ بوضع $\phi(\text{س}) = \text{س} + \text{صه}^p \text{ب}$ لكل $\text{صه}^p \text{ب} \in Z$ حيث $\text{صه}^p \text{ب}$ عدد صحيح ثابت . فالانسحاب
 ϕ يحرك المجموعة يمينا او يساراً $\text{صه}^p \text{ب}$ من الوحدات . لتكن صه الزمرة الجزئية Z من Z .
 $\text{صه}^p \text{ب}$ برهن ان المجموعات المرافقة اليمنى $\text{صه}^p \text{ب} + \text{صه}$ تكون مساوية للمجموعة المنسحبة
 $\phi(\text{صه}^p \text{ب}) = \{ \text{س} + \text{صه}^p \text{ب} : \text{س} \in \text{صه}^p \text{ب} \}$.
- ب. وضح هندسياً انه اذا كانت $\text{صه}^p \text{ب}$ ، فان المجموعة المرافقة اليمنى (او المنسحبة)

$P + S$ تكون مساوية S .

حـ في R يعرف الانسحاب ϕ : $R \rightarrow R$

بوضع $\phi(r) = (s + h, r)$ لكل : $(s, r) \in R$ حيث $h, r \in R$ ثابتان .
 لتكن $S = \{(s, r) : s = r\}$ حيث $P \in R$ ثابت. فتكون S زمرة جزئية
 من R بالنسبة للجمع . ارسم المجموعة $\phi(S)$ مع قيم عدة من $h, r \in R$. صف
 هندسياً المجموعات المرافقة (المنسحبة) $(h, r) + S$.

١١- ليكن n و r عددين صحيحين موجبين بحيث ان r تقسم n . انشيء زمرة جزئية من Z_n رتبته r .

وهذا يثبت انه اذا كانت r احدى عوامل n فللزمرة Z_n زمرة جزئية رتبته r . لاحظ ان هذا النتيجة لا تتبع من نظرية لاگرانج .

١٢- برهن بانشاء D_8 ان للزمرة الزوجية $(D_8, \circ)$ زمرة جزئية رتبته n . (انظر التمرين ١,٦-٥) (لأنشاء D_8).

١٣- للتحدي . لتكن رتبة الزمرة S_n ستة . فاما ان يكون للزمرة S_n عنصر رتبته ستة (كما في الزمرة Z_6) او ان يكون هناك عناصر a, b, c بحيث يكون للعنصر a رتبة قدرها ثلاثة وللعناصر b, c رتبة اثنين و $S_n = \{a, b, c, a^2, b^2, c^2, \dots\}$ (كما في الزمرة S_3)
 برهن هذه العبارة بحل المسائل التالية :

أ. اثبت ان S_n تحتوي على عنصر رتبته ثلاثة او ستة . كي تثبت ذلك افرض ان لكل عنصر $a \neq 1$ و رتبة اثنين ، واثبت ان S_n تكون تبديلية ولها زمرة جزئية رتبته اربعة (هل هذا ممكن) ؟ ●.

ب. افرض ان S_n زمرة رتبته ستة ولا تحتوي على اي عنصر رتبته ستة . وليكن $a \in S_n$ عنصراً رتبته ثلاثة ولتكن

$$\langle a \rangle = \{1, a, a^2\} = S$$

برهن انه اذا كانت S فتكون S لها رتبة الاثنين.

لتثبيت ذلك استبعد الاحتمالات

$$S = \{1, a, a^2\} \text{ حيث } r = 1, 2, \text{ ص } 2, \text{ ص } 2, \text{ ص } 2.$$

حـ اكمل برهان العرضية .

١٤* للتحدي . سم زمرة تبديلات $\{1, 2, 3, 4\}$ تحتوي على عدة عناصر صيغتها

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

منها عدنان صحيحان يبقيان ثابتين . والتبديلة

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

عنصر من هذا النوع . وتسمى هذه العناصر بالنقلات.

٢. جد كل النقلات في S_4 .

لتكن A المجموعة المكونة من عناصر من S_4 هي نتيجة عدد زوجي من النقلات (ليس من الضروري ان تكون كلها مختلفة).
ولهذا تأخذ عناصر A الصيغة

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

او تركيبات من هذه العناصر . وستفترض (بدون برهان حتى البند ٤,٢) انه لا يمكن ان تنتمي اي نقلة للمجموعة A .

ب. استعمل النظرية ٩ لبرهان ان A تكون زمرة جزئية من S_4 . وتكون المجموعة A زمرة جزئية فعلا . لاننا فرضنا ان اي نقلة لا يمكن ان تنتمي الى المجموعة A . ما هي القيم المحتملة لرتبة A ؟

ج. اعمل قائمة بعناصر A وجد رتبة A .

د. جد رتبة كل عنصر في A .

هـ. اثبت ان A ليست لها زمرة جزئية من الرتبة ستة. ●

٢,٤ الاقترانات المحافظة

سنعتبر في هذا البند بعض الاقترانات الخاصة التي تقرن زمرة ما S بزمرة ما $\overline{S}$.

وليس ما يهمنا هنا كل الاقترانات من زمرة الى أخرى وانما فقط الاقترانات التي تحافظ بشكل ما على عمليات الزمرتين S ، $\overline{S}$.

وترزودنا اللوغرتمات بمثال على هذه الاقترانات : نعلم ان $(R, +)$ و $(R, \cdot)$ زمرتان

. للوغرتمات الخاصة انه اذا كان s و $v \in R^+$ فان $\log(v) = \log(s) + \log(v/s)$.

ولهذا فيقرن اللوغرتم حاصل الضرب في R^+ بحاصل جمع في R .

تعريف :

لتكن (ϕ, ψ) و (ϕ, ψ^*) زميرتين .

فالاقتران المحافظ من ϕ الى ψ هو اقتران

$$\phi = (\phi, \psi) \quad \phi * (\phi, \psi) \quad \phi \text{ لكل } \phi, \psi \text{ بـ } \phi$$

ففي الاقتران المحافظ تكون صورة حاصل الضرب (او الجمع) هي حاصل الضرب (او الجمع) للصور . ويمكننا بيان هذا كما في الشكل ٢,٣ .

$$\begin{aligned} \phi &: \phi \longleftarrow \psi \\ \phi &\longleftarrow \psi^* \\ \phi &\longleftarrow \psi \\ \phi &\longleftarrow \psi^* \\ \phi &\longleftarrow \psi^* = \phi * (\phi, \psi) \end{aligned}$$

مسألة :

في كل من اجزاء هذه المسألة حقق هل الاقتران المعطى ϕ : $\phi \longleftarrow \psi$ اقتران محافظ ام لا ، وعلل اجاباتك.

١. ϕ من $(\phi, \psi) - R$ الى نفسها معرفة بالصيغة $\phi (s) = s^n$ حيث n عدد صحيح موجب ثابت.

ب. ϕ من $(\phi, \psi^+) - R$ الى نفسها معرفة بالصيغة $\phi (s) = s + 1$.

ج. ϕ من $(\phi, \psi) - R$ الى (ϕ, ψ^+) معرفة بالصيغة $\phi (s) = |s|$.

د. ϕ من $(\phi, \psi) - R$ الى (ϕ, ψ^+) معرفة بالصيغة $\phi (s) = s^2$ لكل $s \in \mathbb{Z}$.

يجب ان تحتوي كل زمرة على عنصر محايد ونظائر لعناصرها . وبما ان العنصر المحايد والنظائر تعرف صورها بواسطة عملية الزمرة والاقتران المحافظ « يحافظ على العملية » لذا نأمل بتعيين صورها بالنسبة للاقتران المحافظ . وهذا هو مقصد النظرية التالية :

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

ϕ اقتران محافظ من الزمرة (ϕ, ψ) الى الزمرة (ϕ, ψ^*) .

فاذا كان ϕ العنصر المحايد في ϕ ، ϕ العنصر المحايد في ϕ^* . فيكون $\phi (w) = \phi (w)$ ، $\phi (w) = \phi (w)$.

اذكر نتيجة النظرية ٤١ بالكلمات . بالنسبة لاقتران محافظ

$\phi \longleftarrow \psi$ تكون صورة العنصر المحايد في ϕ هي _____ وصورة نظير اي عنصر هي _____

مسألة :

في كل اقتران محافظ في المسألة ٤٠ ، استعمل النظرية ٤١ لحساب ϕ (و) و ϕ (٢) حيث ϕ دس

مسألة :

برهن انه اذا كان ϕ اقتراناً محافظاً من الزمرة (س، هـ) الى الزمرة (س، هـ، *) وكان ن عدداً صحيحاً موجباً و $\phi \in P$ كان

$$\phi (١ \circ \dots \circ ١) = \phi (١) * \phi (٢) * \dots * \phi (٢).$$

حيث يوجد ن من الحدود في كل تعبير . استعمل تعريف المضاعفات والقوى لكتابة هذه النتيجة عندما تكون (س، هـ، +) و (س، هـ، +) زمري جمع وعندما تكون (س، هـ، ٠) و (س، هـ، ٠) زمري ضرب .

هنالك تناظر طبيعي $P \leftarrow P$ من Z الى Z وفي المسألة التالية نثبت ان هذا التناظر اقتران محافظ .

مسألة :

ليكن ن عدداً صحيحاً موجباً ثابتاً . عرف اقتراناً $\phi : Z \leftarrow Z$ بوضع $\phi (٢) = ٢$ لكل $٢ \in Z$.

٢- برهن ان ϕ اقتران محافظ من (٢، +) الى (٢، +).

ب. هل ϕ اقتران شامل من Z الى Z ؟

ج. هل ϕ اقتران واحد لواحد ؟

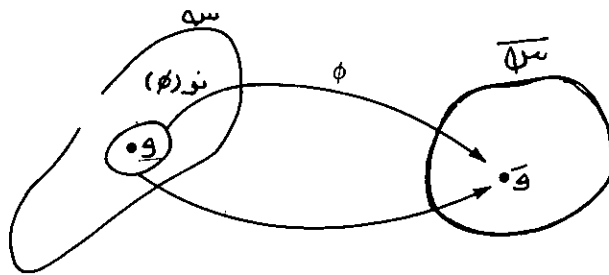
يرتبط كل اقتران محافظ $\phi : S \leftarrow S$ بمجموعتين مهمتين النواة ومجموعة الصور اللتين سندرسهما الآن.

تعريف :

لتكن (س، هـ) و (س، هـ، *) زمريتين . تعرف نواة اي اقتران محافظ بانها المجموعة من كل العناصر في س، هـ التي تقرر بالعنصر المحايد و دس و يرمز لنواة ϕ بالزمر نو (ϕ) ولذا فان

$$\text{نو}(\phi) = \{س : س \in س، هـ \text{ و } \phi(س) = \text{و}\}$$

(انظر الشكل ٢،٤)



شكل ٢،٤

مسألة :

جد نو(ϕ) للاقتران المحافظ في المسألة ٤٤.

هل هي زمرة جزئية من Z ؟

مسألة :

عرف اقتراناً ϕ : $M \leftarrow (R)$ بوضع

$$\phi = ((\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}))$$

وتسمى الصورة ϕ (ل) للمصفوفة ل اثر المصفوفة ل

١. هل ϕ اقتران محافظ من (M, R) الى $(+, +)$ ؟ علل اجابتك.

ب جد نواة ϕ . هل هي زمرة جزئية من M (R) ؟

ح جد مجموعة الصور $\{\phi(L) : L \in M(R)\}$

تزدنا كل من النواة ومجموعة الصور للاقتران المحافظ بزمرتين جزئيتين مفيدتين والحقيقة

القائلة ان هاتين المجموعتين هما زمرتان جزئيتان من زمريهما هي فحوى النظريتين ٤٨ و

٥١ . وفي البند ٢٩، نبين ان نواة الاقتران المحافظ ϕ من الزمرة S_n الى الزمرة $\overline{S_n}$ لها دور

هام في وصف $\overline{S_n}$.

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن (S_n, ϕ) و $(\overline{S_n}, *)$ زمريتين . فاذا كان $\phi : S_n \leftarrow \overline{S_n}$ اقترانا محافظاً كانت

نو(ϕ) زمرة جزئية من S_n .

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن (S_n, ϕ) و $(\overline{S_n}, *)$ زمريتين . يكون الاقتران المحافظ ϕ :

$S_n \leftarrow \overline{S_n}$ واحداً لواحد اذا وفقط اذا كانت نواه ϕ تحتوي فقط على العنصر المحايد في S_n

وباختصار يكون الاقتران المحافظ ϕ واحداً لواحد اذا وفقط اذا كانت نو(ϕ) = $\{e\}$.

وتتيح لنا النظرية ٤٩ التحقق من كون الاقتران المحافظ متبايناً وذلك بايجاد نواة هذا

الاقتران . فاذا كانت النواة تحتوي على عنصر واحد فقط كان الاقتران المحافظ متبايناً .

واذا احتوت النواة ولو على عنصر واحد عدا e فان الاقتران المحافظ لا يكون متبايناً . لاحظ

انه يمكن التحقق من كون الاقتران المحافظ واحداً لواحد باختيار هذه الخاصية عند النقطة

$$\bar{\phi} = \phi \text{ (و).}$$

فالاقتزان المحافظ ϕ يكون واحداً لواحد اذا وفقط اذا تحقق الشرط لكل $s \in S, s \in \phi$ (س) $\bar{\phi} = \phi$ و

مسألة :

ليكن ϕ الاقتزان المحافظ من $(R, +)$ الى $(R, +)$ معرفاً بالصيغة $\phi(s) = s$.
استعمل النظرية ٤٩ لبرهان ان ϕ اقتزان تبايني .
اترك برهان النظرية التالية للتمرين ٩.

نظرية :

اذا كان ϕ اقتزاناً محافظاً من الزمرة $(S, +)$ الى الزمرة $(S, +)$ تكون مجموعة الصور $\phi(S)$ زمرة جزئية من S (تذكر ان $\phi(s) = s$).

تمارين :

عرف اقتزاناً ϕ من زمرة الضرب L للمصفوفات 2×2 غير المنفردة الى $(R, +)$ بوضع

$$\phi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = a - b - c$$

$$\text{لكل } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in L$$

فلكل $e \in L$ ، تكون $\phi(e)$ محددة ع

١. برهن ان ϕ اقتزان محافظ من $(L, +)$ الى $(R, +)$.

ب. جد نواة ϕ .

ج. لتكن $e \in L$ استعمل الحقيقة ان ϕ اقتزان محافظ لايجاد $\phi(e)$.

٢. عرف الاقتزان $\phi : M(R) \leftarrow R$ بوضع

$$\phi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = a + b + c + d$$

$$\text{لكل } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(R)$$

١. هل ϕ اقتزان محافظ من $(M(R), +)$ الى $(R, +)$ ؟ علل اجابتك.

ب. جد نواة ϕ وصورة ϕ (بالنسبة الى ϕ).

٣. جد اقتزاناً محافظاً وشاملاً من $(R, +)$ الى $(R, +)$ معرفاً بالصيغة $\phi(s) = s$.

٤. عين كل الاقتزانات المحافظة من $(Z, +)$ الى $(Z, +)$. علل اجابتك .

٥ . جد اقتراناً محافظاً وشاملاً من $(Z, +)$ الى $(Z, +)$. لا تنسى ان تبرهن ان اقترانك هو بالفعل اقتران محافظ

٦ . لتكن $\emptyset : S \leftarrow Z$ معرفة بالصيغة

$$\left\{ \begin{aligned} & 2^* \text{ اذا كانت } \infty \\ & 2^* \text{ خلاف ذلك} \end{aligned} \right. = \emptyset (\infty)$$

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

بن ان $\emptyset$ اقتران محافظ . وهذا يبين انه يمكن لزمرة غير تبديلية ان تقترب اقتراناً شاملاً بزمرة تبديلية بواسطة اقتران محافظ

*٧ . لتكن $(S, \circ)$ و $(S, *)$ زميرتين ولتكن $S \rightarrow S$ عرف اقتراناً

$\emptyset : S \leftarrow S$ بالصيغة $\emptyset(p) = S$ لكل $p \in S$. جد كل العناصر $S \rightarrow S$ بحيث يكون $\emptyset$ اقتراناً محافظاً

٨ . عرف $\emptyset : Z \leftarrow Z$ بالصيغة $\emptyset(p) = p$ لكل $p \in Z$

١ . اذا كانت $n = 6$ ، $r = 5$ جد $\emptyset(6^*)$ ، $\emptyset(6^0)$ ، $\emptyset(6^1)$ ، $\emptyset(6^2)$ ، $\emptyset(6^3)$ ، $\emptyset(6^4)$ ، $\emptyset(6^5)$ ، $\emptyset(6^6)$.

هل $\emptyset : Z \leftarrow Z$ اقتران ؟ اذا كانت $n = 6$ و $r = 3$

جد $\emptyset(6^0)$ ، $\emptyset(6^1)$ ، $\emptyset(6^2)$ ، $\emptyset(6^3)$ و $\emptyset(6^4)$.

هل $\emptyset : Z \leftarrow Z$ اقتران ؟

ب . برهن ان $\emptyset$ تكون معرفة تعريفاً حسناً اذا وفقط اذا كان $r \mid n$ •

ج . برهن انه اذا كانت $r \mid n$ كان الاقتران $\emptyset : Z \leftarrow Z$ اقتراناً محافظاً .

د . اذا كانت $r \nmid n$ ، جد نو $\emptyset$ و $\emptyset(Z)$ بعبارات صريحة .

٩ . برهن النظرية ٥١ .

١٠ . برهن العبارات التالية أو أعط مثالا يناقضها :

اذا كان $\emptyset$ اقتراناً محافظاً وشاملاً من زمرة تبديلية $(S, \circ)$ الى زمرة $(S, *)$ كانت S زمرة تبديلية .

١١ . ناقش التأثيرات المحتملة الناتجة عن اقتران محافظ $\emptyset : S \leftarrow S$ على رتبة عنصر ما س

S :

رتبة $\emptyset(S)$

رتبة س

منتھية

منتھية

لا نهائية

منتھية

منتھية

لا نهائية

لا نهائية

لا نهائية

في كل حالة برهن التوافق المعطى بين رتبة س ورتبة ϕ (س) لا يمكن ان يحصل او اعط مثالا يتحقق فيه هذا التوافق.

١٢ - برهن انه اذا كان ϕ اقتراناً محافظاً شاملاً من الزمرة (س، هـ) الى الزمرة (س، هـ، *) وكانت س = $\langle \phi \rangle$ حيث $\phi \in \text{س}$ ذو رتبة منتهية فانه يوجد $\phi \in \text{س}$ بحيث ان $\langle \phi \rangle = \text{س}$.

١٣ - ليكن ϕ : س $\leftarrow$ س اقتراناً محافظاً من الزمرة (س، هـ) الى الزمرة (س، هـ، *) وليكن $\phi \in \text{س}$ عنصراً رتبته منتهية . برهن ان رتبة ϕ (٢) تقسم رتبة ϕ .

١٤ - ليكن ϕ اقتراناً محافظاً من الزمرة (س، هـ، *) الى الزمرة (س، هـ، *) ولتكن ص مجموعة جزئية من س. عرف معكوس صورة ص بانه المجموعة $\phi^{-1}(\text{ص}) = \{ \text{س} : \text{س} \in \text{س} \text{ و } \phi(\text{س}) \in \text{ص} \}$

١. عرف $\phi \leftarrow Z$ بالصيغة

$\phi(٢) = \{ \text{س} : \text{س} \in Z \}$. ولتكن ص الزمرة الجزئية $\{١، ٢، ٤، ٨\}$ من Z . جد $\phi^{-1}(\text{ص})$ وبرهن انها زمرة جزئية من Z . ما هي نو (ϕ) ؟ هل نو (ϕ) زمرة جزئية من $\phi^{-1}(\text{ص})$.

ب. لتكن (س، هـ) و (س، هـ، *) زمرتين وليكن ϕ : س $\leftarrow$ س اقتراناً محافظاً . برهن انه اذا كانت ص زمرة جزئية من س فان $\phi^{-1}(\text{ص})$ زمرة جزئية من س وان نو $(\phi) \subseteq \phi^{-1}(\text{ص})$.

٢,٥ التشاكل

رأينا امثلة عديدة على الزمر منها زمر تختلف اختلافاً كبيراً عن غيرها ، فمثلاً يظهر ان للزمرتين Z و D خصائص قليلة مشتركة . ولكن هناك زمراً اخرى مثل Z، والزمرة الجزئية $\{١، ٢، ٤، ٨\}$ من D فهاتان لهما نفس الرتبة على الاقل . وهنا يطرح السؤال كيف يمكننا مقارنة او تصنيف الزمر بحيث نتبين هل التركيب الاساسي لاي زمرتين معطاتين واحد . واحد الطرق لذلك تتطلب وجود اقتران واحد لواحد بين الزمrtين يحافظ ايضاً على عملياتها وتتطلب في حالة الزمر المنتهية توافم الجدولين.

مسألة :

١. قارن موضعي العنصرين المحايدتين في جدولي العمليتين لزمرة الجمع Z والزمرة الجزئية

ص = $\{0, 1, 2, 3\}$ من D؛ ومن ثم قارن موضع 1 مع 2 في جدوليهما. ما هي اوجه التشابه التي تلاحظها؟

ب. نصوص التناظر بين الزمرتين بتعريف اقتران ϕ من Z الى صه حيث $\phi(1) = 1$ و $2 = 1, 0, 1, 2, 3$. (تذكر ان $1 = 1$ و $2 = 1$ عندما تكون $1 = 1$) $(1, 2)$.
 3. برهن ان ϕ اقتران محافظ شامل متباين من Z الى $\{0, 1, 2, 3\}$.
تعريف :

التشاكل بين الزمرتين $(S, *)$ و $(S', *)$ هو اقتران محافظ من S' الى S بحيث يكون تبانياً وشاملاً. وتكون الزمرتان $(S, *)$ و $(S', *)$ متشاكلتين اذا فقط اذا امكن ايجاد تشاكل ϕ من S' الى S .

مسألة :

جد تشاكلاً بين $(Z, +)$ وزمرة الجمع $Z^3 = \{z \in Z : z^3 = 1\}$.
 رأينا انه اذا كان $\phi : S \rightarrow S'$ اقتراناً محافظاً فيمكن استعمال نو (ϕ) ومجموعة الصور $\phi(S)$ لتعيين هل ϕ واحد لواحد او شامل. ويمكن استخدام هذه النتائج لتقرير متى تكون ϕ تشاكلاً.

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن $(S, *)$ و $(S', *)$ زمريتين وليكن $\phi : S \rightarrow S'$ اقتراناً محافظاً. فيكون ϕ تشاكلاً اذا فقط اذا كان نو $(\phi) = \{0\}$ حيث 0 هو العنصر المحايد في S و $\phi(0) = 0$.
 ومن نتائج النظرية 55 اننا نحتاج الى فحص مجموعتين فقط، وهما النواة ومجموعة الصور، لتقرير هل الاقتران المحافظ المعطى تشاكل ام لا.

وبوجه خاص، اذا امكن ايجاد $f \neq 1$ بحيث ان $f \in \phi(0)$ فلا تكون ϕ تشاكلاً. وبالمثل اذا امكن ايجاد $f \in \phi(0)$ بحيث ان $f \notin \phi(0)$ فان ϕ لا تكون تشاكلاً.

مسألة :

حقق فيما اذا كانت كل من الاقترانات التالية تشاكلاً من $(R, -)$ الى نفسها.

أ. $\phi(s) = s^2$ حيث $s \in R$ - $\{0\}$

ب. $\phi(s) = s^2$ حيث $s \in R$ - $\{0\}$

ان احدى الطرق لتقرير هل من الممكن لزمريتين منتهيتين $(S, *)$ و $(S', *)$ ان تكونا متشاكلتين هي مقارنة جدولي عمليتيهما

فاذا اردنا ان يكون الاقتران المفروض تشاكلاً فان صورة العنصر المحايد في S تكون

حيث $\exists p$ ، ويعطينا هذا الصف التبدلية

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} = x_7$$

$P_1 = P_2 = \dots = P_n$	P_1 P_2 $\vdots$ P_n

الجدول ٢,٣

$\bar{p}_1 \dots \bar{p}_m$	*
	$\bar{p}_1$
	$\bar{p}_2$
	$\vdots$
	$\bar{p}_m$
	$\vdots$
	$\bar{p}_n$

الجدول ٢,٤

الجدول ٢,٥

+	٣٠	٣١	٣٢
٣٠	٣٠	٣١	٣٢
٣١	٣١	٣٢	٣٠
٣٢	٣٢	٣٠	٣١

مسألة :

٢. اكتب جدول التركيبات للتبديلات $\mathcal{H}$ ، $\mathcal{H}$ ، $\mathcal{H}$ المعرفة اعلاه.

لتكن $\Omega = \{ \mathcal{H} , \mathcal{H} , \mathcal{H} \}$.

فهل تكون Ω زمرة ؟ (تذكر ان Ω هي مجموعة جزئية منتهية من

م $\{ \mathcal{H} , \mathcal{H} , \mathcal{H} \}$) ، وهي الزمرة المكونة من تبديلات $\{ \mathcal{H} , \mathcal{H} , \mathcal{H} \}$.

ب. اثبت بمطابقة الجدولين ان التناظر $\mathcal{H} \leftarrow \mathcal{H} , \mathcal{H} \leftarrow \mathcal{H} , \mathcal{H} \leftarrow \mathcal{H}$ يعرف تشاكلا من $\mathcal{H}$ الى الزمرة $\Omega = \{ \mathcal{H} , \mathcal{H} , \mathcal{H} \}$.

ان التناظر المعرف في المسألة ٥٩ يبرهن ان $\mathcal{H}$ متشاكلة مع Ω الزمرة الجزئية لزمرة التبديلات على $\mathcal{H}$. والتعميم من هذه النتيجة لزمرة اختيارية. يعتمد على نفس هذا الاسلوب من تكوين التبديلات وهذا التعميم ، ويسمى باسم الرياضي الانجليزي ارثر كايلي ، يعتبر من اروع النتائج في نظرية الزمر . تذكر ان لكل مجموعة غير خالية $\mathcal{H}$ تكون مجموعة التبديلات على $\mathcal{H}$ ، م ($\mathcal{H}$) زمرة بالنسبة لعملية تركيب الاقتوانات.

نظرية :

نظرية كايلي . كل زمرة $\mathcal{H}$ تكون متشاكلة مع زمرة جزئية من زمرة تبديلات . وبشكل خاص تكون $\mathcal{H}$ متشاكلة مع زمرة جزئية من م ($\mathcal{H}$) .
برهن النظرية بواسطة المسألة التالية :

مسألة :

١. لتكن $\mathcal{H} \ni \mathcal{H}$. عرف اقتراناً

$\mathcal{H} : \mathcal{H} \leftarrow \mathcal{H}$ بوضع $\mathcal{H} (\mathcal{H}) = \mathcal{H} \mathcal{H}$ لكل $\mathcal{H} \in \mathcal{H}$.

اثبت ان $\mathcal{H}$ تبديلية على $\mathcal{H}$ (اي انه اقتران واحد لواحد وشامل من $\mathcal{H}$ الى $\mathcal{H}$) .

ب. اكمل العبارة $\mathcal{H} \mathcal{H} = \mathcal{H}$. ولعمل ذلك احسب

$(\mathcal{H} \mathcal{H}) (\mathcal{H})$ ، حيث $\mathcal{H} \in \mathcal{H}$.

ج. اثبت ان المجموعة $\Omega = \{ \mathcal{H} : \mathcal{H} \in \mathcal{H} \}$ زمرة جزئية من م ($\mathcal{H}$) بالنسبة لعملية التركيب .

د. عرف اقتراناً $\mathcal{H} : \mathcal{H} \leftarrow \mathcal{H}$ بوضع

(١) $\emptyset = \mathcal{H}$ لكل $\exists \mathcal{H}$

اثبت ان $\emptyset$ تشاكل بين $\mathcal{H}$ و $\mathcal{H}$

(لا تنسى ان تبرهن (١) أن $\emptyset$ اقتران محافظ (٢) أن $\emptyset$ اقتران واحد لواحد و (٣) أن $\emptyset$ اقتران شامل).

تخبرنا نظرية كايلى (النظرية ٦٠) اننا اذا اردنا ايجاد جميع الزمر من رتبة معينة نحتاج فقط للنظر الى الزمر الجزئية من زمر التبديلات . وبالرغم من أن هذه تحدد انتباهنا فعلا، الا انها لا تصف كل الزمر المرغوبة . والواقع ، ان مسألة ايجاد جميع الزمر من رتبة n ، حيث n ، عدد صحيح موجب اختياري هي من اعظم المسائل غير المحلولة في نظرية الزمر ، فالزمر الجزئية من زمر التبديلات ليست جميعها معروفة.

تمارين :

١ - لتكن $(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ و $(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ زميرتين متشاكلتين . برهن ان $(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ زمرة ابدالية اذا وفقط اذا كانت $(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ تبديلية.

٢ - اكتب تشاكلا بين $(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ و زمرة جزئية ملائمة من $\mathcal{H}$ بالنسبة للتركيب.

٣ - في كل جزء من هذا التمرين برهن او انف وجود تشاكل بين الزوج المعطى من الزمر.

أ. $(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ والزمرة $(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ المكونة من تماثلات المربع .

ب. $(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ و $(\mathcal{H}, \mathcal{H})$

ج. $(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ والزمرة $\mathcal{H}$ المكونة من تماثلات مثلث متساوي الاضلاع بالنسبة لعملية التركيب.

د. الزميرتان الجزئيتان $\{u, u, u, u\}$ و $\{u, u, u, u\}$ من $\mathcal{H}$ بالنسبة لعملية التركيب.

٤ - عين كل قيم العدد الصحيح n بحيث يكون الاقتران التالي تشاكلا :

$\emptyset$ من $(R - \{0\}, \{0\})$ الى نفسها معرفة بالصيغة $\mathcal{H}(s) = s$.

٥ - برهن انه اذا كانت $\mathcal{H}$ زمرة جزئية من زمرة الجمع Z و $\mathcal{H} \neq \{0\}$ ، فتكون $\mathcal{H}$ متشاكلة مع Z .

٦ - برهن او انف وجود تشاكل بين $(\mathcal{H}, Z)$ و $(\mathcal{H}, Q)$.

٧ - برهن او انف وجود تشاكل بين $(\mathcal{H}, Z)$ و زمرة الجمع

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{H} \ni z \right\}$$

٨ - برهن او انف وجود تشاكل بين $(\mathcal{H}, R)$ و $(R - \{0\}, \{0\})$

٩ - ليكن R ، n عددين صحيحين موجبيين . اكمل العبارة التالية وبرهنها :

ولهذا فنقول اننا قد عينا كل الزمر غير المتشاكلة التي رتبها اربعة . وقد عينا في التمرين ١٤ كل الزمر غير المتشاكلة بالرتبتين اثنتين وثلاثة.

١٦. عين جميع الزمر غير المتشاكلة التي رتبها خمسة ولعمل ذلك لتكن $\mathcal{S}$ زمرة رتبها خمسة . ولتكن $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{S}$ بحيث ان $\mathcal{P} \neq \mathcal{S}$ و فرتبة العنصر $\mathcal{P}$ تساوي _____ . اكتب جدول عملية على $\mathcal{S}$ وبرهن ان $\mathcal{S}$ متشاكلة مع زمرة الجمع $\mathcal{Z}$. تبين التمارين ١٤، ١٥، ١٦، ان اي زمرة بالرتبة اثنتين أو ثلاثة أو اربعة أو خمسة يجب ان تكون تبديلية.

١٧. برهن ان كل زمرة رتبها ستة تكون متشاكلة مع زمرة الجمع $\mathcal{Z}$ أو مع الزمرة المكونة من التبديلات $\mathcal{S}_3$ (انظر التمرين ٢، ٣ - ١٣) . ولهذا فتكون $\mathcal{Z}$ و $\mathcal{S}_3$ زمرتين غير متشاكلتين رتبة كل منهما ستة .

١٨. ليكن $\mathcal{P}$ تشاكلا بين الزمrtين $(\mathcal{S}, ٥)$ و $(\mathcal{S}, *)$ برهن انه لكل $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{S}$ تكون رتبة $\mathcal{P}$ (٢) في $\mathcal{S}$ مساوية لرتبة $\mathcal{P}$ في $\mathcal{S}$.

٢،٦ الزمر الدورية

رأينا عدة امثلة على زمر متولدة باستخدام قوى (أو مضاعفات) عنصر منفرد . وتشمل هذه الامثلة زمرة الجمع $\mathcal{Z}$ والزمر الجزئية من $\mathcal{Z}$ بالنسبة للجمع . ونرى في هذا البند ان اي زمرة تحتوي فقط على قوى أو مضاعفات عنصر منفرد تكون متشاكلة مع بعض الزمر المعروفة . تذكر انه اذا كانت $(\mathcal{S}, ٥)$ زمرة و $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{S}$ عنصراً ذا رتبة منتهية ن فان المجموعة : $\langle \mathcal{P} \rangle = \{ \mathcal{P}^i : \mathcal{P} \in \mathcal{Z} \}$ تكون زمرة ابدالية جزئية من $\mathcal{S}$. (في زمرة جمع $\langle \mathcal{P} \rangle = \{ \mathcal{P}^i : \mathcal{P} \in \mathcal{Z} \}$)

ولكن اذا كان للعنصر $\mathcal{P}$ رتبة غير منتهية ، فلا تكون المجموعة $\{ \mathcal{P}^i : \mathcal{P} \in \mathcal{Z} \}$ أو $\{ \mathcal{P}^i : \mathcal{P} \in \mathcal{Z} \}$ زمرة جزئية . فمثلا ، المجموعة $\{ \mathcal{P}^i : \mathcal{P} \in \mathcal{Z} \} = \{ ٢، ٤، ٦، \dots \}$ ليست زمرة بالتأكيد ولمثل هذه الحالات نحصل على التعريف التالي :

تعريف :

لتكن $(\mathcal{S}, +)$ زمرة جمع و $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{S}$ لها رتبة لا نهائية ، عرف $\langle \mathcal{P} \rangle$ بالمجموعة : $\langle \mathcal{P} \rangle = \{ \mathcal{P}^i : \mathcal{P} \in \mathcal{Z} \} = \{ \dots, \mathcal{P} \cdot (-٢)، \mathcal{P} \cdot (-١)، \mathcal{P} \cdot (٠)، \mathcal{P} \cdot (١)، \mathcal{P} \cdot (٢)، \dots \}$ واذا لم تكن $\mathcal{S}$ زمرة جمع و $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{S}$ لها رتبة لا نهائية ، نعرف $\langle \mathcal{P} \rangle$ بالمجموعة $\langle \mathcal{P} \rangle = \{ \mathcal{P}^i : \mathcal{P} \in \mathcal{Z} \} = \{ \dots, \mathcal{P}^{-٢}، \mathcal{P}^{-١}، \mathcal{P}^٠، \mathcal{P}^١، \mathcal{P}^٢، \dots \}$

مسألة :

- أ. في زمرة الجمع Z صف كل عناصر المجموعة $\langle 2 \rangle$.
 ب. في زمرة الضرب $R - \{0\}$ صف كل عناصر المجموعة $\langle \frac{1}{3} \rangle$

مسألة :

في الزمرة D_8 جد العنصر $\bar{q}^{17}$ وعبر عنه بصورة قوة موجبة للزمر P وكذلك عبر عن العنصر $\bar{q}^{16}$ بصورة قوة موجبة للرمز u .

إذا كانت $(s, 0)$ زمرة و $a \in s$ لها رتبة منتهية فإن $\{a : r \in Z\} = \{a : r \in Z\}^+$
 ان برهان هذه النتيجة يتبع حالا من التمرين ٢،٢-٩ وهذا يثبت انه يمكن تعريف $\langle a \rangle$ بانها المجموعة $\{a : r \in Z\}$ لكل $a \in s$ دون اعتبار رتبة a .

وبهذا فان التعريف الجديد يتفق مع التعريف السابق في الحالة التي تكون فيها رتبة العنصر منتهية . وطبيعي انه في زمرة جمع s ، اذا كانت a لها رتبة منتهية فان :

$$\{a : r \in Z\} = \{a : r \in Z\}^+$$

مسألة :

برهن انه اذا كانت s زمرة و $a \in s$ فتكون $\langle a \rangle$ زمرة تبديلية جزئية من s .
 (نعلم صحة هذه النتيجة اذا كانت $a \in s$ لها رتبة منتهية).

وتسمى المجموعة $\langle a \rangle$ بالزمرة الدورية الجزئية المتولدة عن a . وهناك حالات حيث يوجد عنصر a و s وتكون الزمرة الدورية الجزئية المتولدة عن a هي s نفسها . والحالة هذه متضمنة في التعريف التالي :

تعريف :

تسمى الزمرة دورية اذا وفقط اذا امكن ايجاد عنصر $a \in s$ بحيث ان $s = \langle a \rangle$. ويسمى العنصر a بمولد s .

لاحظ ان كل زمرة دورية تكون تبديلية لانه لاي عنصر $a \in s$ تكون $\langle a \rangle$ زمرة تبديلية . لننظر الآن للزمرتين المألوفتين $(Z, +)$ و $(Z_n, +)$ حيث $n \leq 2$.

مسألة :

اثبت ان $(Z, +)$ زمرة دورية . هل يوجد اكثر من عنصر واحد يمكنه (بنفسه) توليد s ؟

مسألة :

اثبت ان $(Z_n, +)$ زمرة دورية . هل يوجد اكثر من عنصر واحد يمكنه (بنفسه) توليد Z_n ؟

مسألة :

ليكن $n \leq 2$ عدداً صحيحاً ثابتاً . اثبت ان $(Z_n, +)$ زمرة دورية .

مسألة :

لتكن (س، ٥) زمرة دورية متولدة عن عنصر بالرتبة ثلاثة.
كم عنصراً مختلفاً يكون في س؟ اعمل جدول عملية للزمرة س واثبت ان س تكون متشاكلة مع الزمرة المعروفة _____

(انتبه باهتمام الى تعريف رتبة العنصر)

تثبت النظرية التالية ان كل الزمر الدورية المنتهية التي لها نفس الرتبة متشاكلة كما انها تشبه الزمر المعروفة .

مسألة :

اكمل العبارة وبرهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن (س، ٥) زمرة دورية متولدة عن عنصر رتبته منتهية ن فتكون س متشاكلة مع الزمرة _____ . ▲

مسألة :

اكمل العبارة وبرهن النظرية التالية :

نظرية :

اذا كانت (س، ٥) زمرة دورية متولدة عن عنصر رتبته لا نهائية فان س متشاكلة مع الزمرة _____

والنظريتان ٧١ ، ٧٢ تكملان وصف وتصنيف جميع الزمر الدورية . فاي زمرة دورية منتهية رتبته ن تتشاكل مع _____ .

واي زمرة دورية غير منتهية تتشاكل مع _____ .

نظرية :

كل زمرة جزئية من زمرة دورية تكون دورية . (اترك برهان هذه النظرية للتمرين ٣). وفي حالة زمرة رتبته عدد أولي يمكننا في الواقع تقوية النظرية ٧١ للحصول على النظرية التالية المهمة جداً.

مسألة :

اكمل العبارة وبرهن النظرية التالية :

كل زمرة رتبها عدد أولي تكون دورية . وبالتحديد اذا كان ب عدداً أولياً .

فكل زمرة رتبها ب تكون دورية ومتشاكلة مع الزمرة _____ .

تمارين :

١ - بين هل كل من الزمر التالية دورية ام لا . علل اجاباتك .

٢. $(S, 5)$
- ب. $(D, 5)$
- ح. الزمرة الجزئية $\{و, ا, ا', ا'', من D\}$
- د. الزمرة الجزئية $\{و, u, u', من D\}$
- ٢ - برهن ان الزمر المنتهية $(S, 5)$ تكون زمرة دورية اذا وفقط اذا وجد عنصر a يكون رتبة نفس رتبة S .
- ٣ - برهن النظرية ٧٣. ●
- ٤ - برهن او انف ان $(Q, +)$ تكون زمرة دورية.
- ٥ - برهن ان كل زمرة غير تبديلية (منتهية او غير منتهية) تحتوي على زمر جزئية تبديلية مختلفة عن $\{و\}$.
- ٦ - لتكن S زمرة ذات رتبة اولية تساوي n . صف كل المولدات المحتملة للزمرة S (اي كل العناصر a بحيث ان $\langle a \rangle = S$). علل اجابتك.
- ٧ - لتكن S زمرة منتهية دورية رتبها n . عين كل الزمر الجزئية الممكنة من S .
- ٨ - لتكن S زمرة لا نهائية دورية. عين كل الزمر الجزئية الممكنة للزمرة S .

٢,٧ الزمر الجزئية الطبيعية

عندما درسنا المجموعات المرافقة اليمنى واليسرى للزمر الجزئية، في البند ٢,٣، لاحظنا انه ليس من الضروري ان يتساوى لأي عنصر معين. ولكن عندما تكون للزمرة الجزئية خاصية $a^5 = e$ لكل a فمن الممكن تكوين نوع جديد من الزمر باستخدام S . وكخطوة اولى لانشاء هذا النوع من الزمر تدرس في هذا البند خصائص زمر جزئية خاصة بحيث تكون المجموعات المرافقة اليمنى هي نفسها المجموعات المرافقة اليسرى.

ولبدء هذا العمل مع الزمر الجزئية فمن المفيد ان نعيد ذكر بعض خصائص المجموعات المرافقة. راجع بانتباه النتائج في التمهيدية ٣١.

مسألة:

- في زمرة التماثل $(D, 5)$ المكونة من تماثلات المربع لتكن S الزمرة الجزئية $\{و, u, u', ا'\}$.
- أ. عين العناصر في المجموعة المرافقة اليمنى $a^5 = e$.
- ب. عين العناصر في المجموعة المرافقة اليمنى $a^5 = e$. اعمل هذا بدون حساب، باستخدام الخاصية التالية للمجموعات المرافقة:

إذا كان لمجموعتين مرافقتين يمينين ولو عنصر واحد مشترك فتكونان متساويتين.

حـ احسب دليل $\mathcal{D}$ في $\mathcal{D}$

دـ بدون اي حساب عين المجموعات المرافقة اليمنى المتبقية لـ $\mathcal{D}$ في $\mathcal{D}$.

(وطبيعي ان نفس الطريقة يمكن استخدامها لاي جاد المجموعات المرافقة اليسرى).

تعريف :

لتكن $(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ زمرة و $\mathcal{D}$ زمرة جزئية من $\mathcal{D}$ فتكون $\mathcal{D}$ زمرة جزئية طبيعية من $\mathcal{D}$ اذا وفقط اذا كان لكل $\mathcal{D}$ المجموعة المرافقة اليمنى $\mathcal{D}$ مساوية للمجموعة المرافقة اليسرى $\mathcal{D}$ اي انه اذا وفقط اذا كان لكل $\mathcal{D}$

$$\{r\mathcal{D} : r \in \mathcal{D}\} = \{\mathcal{D}r : r \in \mathcal{D}\} = \mathcal{D} = \mathcal{D}$$

تنبيه :

لبيان ان زمرة جزئية $\mathcal{D}$ من زمرة $\mathcal{D}$ تكون طبيعية في $\mathcal{D}$ فيجب ان نبرهن على ان $\mathcal{D} = \mathcal{D}$ لكل عنصر $\mathcal{D}$ في $(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ الزمرة $\mathcal{D}$. ولا يكفي استخدام تلك العناصر الموجودة في الزمرة الجزئية $\mathcal{D}$ فقط. وفي الواقع اذا كانت $\mathcal{D}$ فان $\mathcal{D} = \mathcal{D} = \mathcal{D}$.

مسألة :

في الزمرة $(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ المكونة من كل تماثلات المربع ، بين هل كل الزمر الجزئية طبيعية ام لا . علل اجاباتك .
قد ترعب في حساب دليل كل من الزمر الجزئية وان ترجع الى الجدول ٢,٢ من التمرين ٢,٣-٣.

- أ. $\{u, v\}$
- ب. $\{u, v\}$
- جـ. $\{u, v, w, x\}$

مسألة :

ينتج مباشرة من المسألة ٢٢ انه اذا كانت الزمرة تبديلية فان كل الزمرة جزئية تكون طبيعية . و يعتقد البعض خطأ بصحة جزء من عكس هذه الحقيقة . انهم يظنون انه اذا كانت $\mathcal{D}$ زمرة جزئية طبيعية من زمرة $\mathcal{D}$ فان $\mathcal{D} = \mathcal{D}$ لكل $\mathcal{D}$ و $\mathcal{D}$.

اختر زمرة جزئية طبيعية من $\mathcal{D}$ (على سبيل المثال لاحظ المسألة ٧٧) واوجد عناصر $\mathcal{D}$ في الزمرة الجزئية وعناصر $\mathcal{D}$ بحيث ان $\mathcal{D} \neq \mathcal{D}$. وبالرغم من ان تعريف الزمرة الجزئية الطبيعية قد اعطي بدلالة تساوي المجموعات ، فان من المناسب العمل بعناصر المجموعات . وكخطوة اولى في برهنة بعض الصيغ المفيدة المكافئة للتعريف فاننا نحصل على التمهيدية التالية :

مسألة :

برهن التمهيدية التالية :

تمهيدية :

لتكن $(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ زمرة . تكون الزمرة الجزئية $\mathcal{D}$ من $\mathcal{D}$ زمرة جزئية طبيعية اذا وفقط اذا كان لكل $\mathcal{D}$

وكل $\alpha \in \mathcal{S}$ يوجد عنصران $r, r' \in \mathcal{S}$ يحققان $r \alpha = r' \alpha$ و $r \neq r'$ Δ
 تعطي النظرية التالية عدة شروط كلها متكافئة لكي تكون أي زمرة جزئية زمرة جزئية طبيعية . استعمل
 التمهيدية ٧٩ لبرهنة تكافؤ العبارتين ١ و ٢ في النظرية (أي لبرهنة أن العبارة ١ تتضمن العبارة ٢
 وبالعكس).

اترك بقية البرهان للتمرين ٧.

نظرية :

لتكن $(\mathcal{S}, \circ)$ زمرة ولتكن $\mathcal{H}$ زمرة جزئية من $\mathcal{S}$. فتكون العبارات التالية متكافئة .

- $\mathcal{H}$ زمرة جزئية طبيعية من $\mathcal{S}$.
- لكل $\alpha \in \mathcal{S}$ و $r \in \mathcal{H}$ يكون $r \alpha \in \mathcal{H}$
- لكل $\alpha \in \mathcal{S}$ يكون $\alpha^{-1} \mathcal{H} \alpha \subseteq \mathcal{H}$
- حيث $\alpha \in \mathcal{S}$ $\alpha^{-1} \mathcal{H} \alpha = \mathcal{H}$ لكل $\alpha \in \mathcal{S}$
- $\alpha \mathcal{H} \alpha^{-1} = \mathcal{H}$ لكل $\alpha \in \mathcal{S}$

عرفنا في البند ٢,٤ نواة الاقتران المحافظ $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}/\sim$ واثبتنا أن النواة تكون زمرة جزئية من $\mathcal{S}$.
 و يمكننا تعميم هذه النتيجة كالتالي :

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن $(\mathcal{S}, \circ)$ و $(\mathcal{H}, *)$ زمريتين وليكن $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}/\sim$ اقتراناً محافظاً فتكون نواة ϕ ، نو (ϕ) ، زمرة
 جزئية طبيعية من $\mathcal{S}$. Δ
 لقد رأينا أنه إذا كانت $\mathcal{H}$ و $\mathcal{H}$ زمريتين جزئيتين من الزمرة $(\mathcal{S}, \circ)$ فتكون $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}$ زمرة جزئية .
 والعرضية ٨٢ تعميم لهذه النتيجة .

عرضية :

لتكن $(\mathcal{S}, \circ)$ زمرة . فإذا كانت $\mathcal{H}$ و $\mathcal{H}$ زمريتين طبيعيتين من $\mathcal{S}$ فتكون $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}$ زمرة جزئية
 طبيعية من $\mathcal{S}$.
 يترك برهان هذه العرضية للتمرين ١.

مسألة :

لتكن $(\mathcal{S}, \circ)$ زمرة و $\mathcal{H}$ زمرة جزئية من $\mathcal{S}$. لقد ذكرنا أنه إذا كانت $\mathcal{H}$ فإن $\mathcal{H} = \mathcal{H} = \mathcal{H}$.

ومن المفيد ان نلاحظ ماذا يحصل عندما $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ فلتكن $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}$ و $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ - صه .

أ. قرر هل $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{B}$ أو $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ - صه .

ب. قرر هل $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ أو $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{B}$ - صه . ▲

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

إذا كانت (س، هـ) زمرة منتهية برتبة زوجية $2n$ وكانت صه زمرة جزئية من سه رتبتهان فتكون صه طبيعية في سه . ▲

وكتطبيقات على النظرية ٨٤ أنظر المسائل ، حتى ٤ .

إذا أعدنا الى الذاكرة ان دليل الزمرة الجزئية صه من سه هو عدد المجموعات المرافقة اليمنى المختلفة لـ صه فيمكننا إعادة كتابة النظرية ٨٤ على النحو التالي :

نظرية :

لتكن (س، هـ) زمرة منتهية و صه زمرة جزئية دليلها ٢ في سه فتكون صه طبيعية في سه .

وكتعميم لهذه الصيغة من النظرية انظر التمرين ٥ .

نظرية :

استعمل النظرية ٨٤ لايجاد زمرة جزئية فعلا وطبيعية للزمرة S_n .

لقد لاحظنا انه لاي زمرة جزئية صه من الزمرة سه فان المجموعات المرافقة لـ صه تتصرف مثل الصفوف في علاقة تكافؤ (مثلا تكون اي مجموعتين مرافقتين $\mathcal{R}$ صه اما منفصلتين او متساويتين). وفي البند التالي سندرس المجموعة المكونة من كل المجموعات المرافقة لزمرة جزئية طبيعية (تماما كما درسنا المجموعة المكونة من كل صفوف التكافؤ في مضاعفات Z) ونثبت انه لاي زمرة جزئية طبيعية من الممكن تعريف عملية ثنائية على هذه المجموعة من المجموعات المرافقة .

تمارين :

١ - برهن العرضية ٨٢ .

٢ - جد كل الزمر الجزئية الطبيعية من D_n ●

٣ - برهن انه لكل عدد صحيح $n \geq 3$ يوجد للزمرة الثنائية D_n زمرة جزئية طبيعية رتبتهان .

٤ - جد كل الزمر الجزئية الطبيعية من S_n .

٥ - برهن النظرية التالية وتعتبر توسيعاً للنظرية ٨٤ . ولعمل ذلك يمكنك الاستفادة من التمرين

٣، ٢، ٧ .

٦. جد اقتراناً محافظاً شاملاً من S الى S . لا تنسى ان نواة الاقتران المحافظ يجب ان تكون زمرة جزئية طبيعية من S .

٧. اكمل البرهان للنظرية ٨٠. قد ترغب في برهنة سلسلة التضمينات

$$B \subseteq C \subseteq D \subseteq B \text{ لانك برهنت ان } A \subseteq B.$$

٨. لتكن $(S, \circ)$ و $(S, *)$ زمرتين وليكن $\phi: S \rightarrow S$ اقتراناً محافظاً.

١. برهن انه اذا كان ϕ شاملاً وكانت S زمرة جزئية طبيعية من S تكون مجموعة الصور $\phi(S)$ زمرة جزئية طبيعية من S .

ب. برهن ان اذا كانت S زمرة جزئية طبيعية من S تكون الصورة العكسية $\phi^{-1}(S)$ زمرة جزئية طبيعية من S . انظر التمرين ٢,٤-١٣ لتعريف $\phi^{-1}(S)$.

٩. تعريف :

اذا كانت $(S, \circ)$ زمرة فمركز S ، ويرمز له بالرمز $Z(S)$ هو المجموعة $Z(S) = \{s \in S : s \circ s' = s' \circ s \text{ لكل } s' \in S\}$ ولهذا فالعنصر s ينتمي الى مركز S اذا وفقط اذا كانت s تبديلية مع كل عنصر في S

٢. جد مركز الزمرة $(S, \circ)$

ب. جد مركز الزمرة $(D, \circ)$

١٠. لتكن $(S, \circ)$ زمرة. برهن العبارة التالية بالنسبة الى $Z(S)$:

١. $Z(S)$ زمرة جزئية من S .

ب. $Z(S)$ زمرة جزئية تبديلية من S .

ج. $Z(S)$ زمرة جزئية طبيعية من S .

د. $Z(S)$ زمرة جزئية تبديلية.

١١. جد مركز زمرة الضرب ل المكونة من المصفوفات 2×2 غير المنفردة.

تنبيه :

$Z(L)$ ليست مكونة فقط من المصفوفة المحايدة.

١٢. العنصر المتبادل في الزمر $(S, \circ)$ هو اي عنصراً يأخذ الصيغة $s \circ s' = s' \circ s$ حيث $s, s' \in S$ مثلاً في D العنصر p, u, a, b متبادل.

لتكن S المجموعة المكونة من كل المضروبات المنتهية لتبادلات في S . وبالتحديد اذا كانت $S = \{r, 1, 2, \dots, n\}$ ، ن أي عدد صحيح موجب فيقول تعريف S ان التركيب

$$(s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_n) \circ (s_1' \circ s_2' \circ \dots \circ s_n') \text{ يكون عنصراً في } S$$

٢. برهن ان S تكون زمرة جزئية من S . تسمى هذه المجموعة S بالزمرة الجزئية المتبادلة

من سم .

ب. برهن ان صه تكون زمرة جزئية طبيعية من سم . ●

ح. جد الزمرة الجزئية المتبادلة من D . ابدأ بإيجاد المتبادلات في D وقارن مع الزمر الجزئية الطبيعية من D .

د. اذا كانت الزمرة (سم ، ه) تبديلية فتكون الزمرة الجزئية المتبادلة من سم تساوي ——— . هل العكس صحيح ؟ علل اجابتك .

١٣. برهن انه اذا كانت صه زمرة جزئية من سم و 3سم فان هه صه زمرة جزئية من سم . وبهذا فان المجموعة هه صه هه تكون لها فائدة حتى اذا لم تكن صه زمرة جزئية طبيعية من سم . وفي الواقع فالمجموعة هه صه هه يمكن ان تكون مختلفة عن صه اذا لم تكن صه زمرة جزئية طبيعية .

١٤. *لتكن (سم ، ه) زمرة و صه و ع زمرتين جزئيتين طبيعيتين من سم حيث ان $\text{صه} \cap \text{ع} = \{ \text{و} \}$. اثبت ان $\text{صه} = \text{ع} = \text{ه}$ لكل صه و ع .

١٥. لتكن صه و ع زمرتين جزئيتين من الزمرة سم . نعرف مركبة اي زمرتين جزئيتين صه و ع بانها المجموعة

$$\text{صه} = \text{ع} = \{ \text{صه} : \text{صه} \text{ و } \text{ع} \}$$

١. في الزمرة D لتكن $\text{صه} = \{ \text{و} ، \text{ه} \}$ و $\text{ع} = \{ \text{و} ، \text{و} \}$. لاحظ ان صه تكون طبيعية في D . جد صه وقرر هل هي زمرة جزئية من D ام لا .

ب. اعط مثالا في S_n لا ثبات ان مركبة ان زمرتين جزئيتين ليس من الضروري ان تكون زمرة جزئية .

١٦. *لتكن (سم ، ه) زمرة و صه و ع زمرتين جزئيتين من سم . برهن العبارتين التاليتين .

٢. اذا كانت صه طبيعية في سم أو ع طبيعية في سم فان صه تكون زمرة جزئية من سم .

ب. اذا كانت صه طبيعية في سم و ع طبيعية في سم فتكون صه زمرة جزئية طبيعية من سم .

٢,٨ الزمر الخارجة

ركزنا في البند ٢,٧ على خصائص الزمر الجزئية الطبيعية للزمرة سم (اي الزمرة الجزئية صه حيث تكون المجموعة المرافقة اليمنى هه مساوية للمجموعة المرافقة اليسرى صه ٢٥) . وبهذه الخصائص يمكننا الآن بناء زمرة جديدة تكون عناصرها المجموعات المرافقة للزمرة الجزئية الطبيعية صه من سم . وتلعب زمرة المجموعات المرافقة هذه دوراً هاماً في نظرية الزمر . والمدش هو ان مفهوم زمرة المجموعات المرافقة يتيح لنا تعيين الصور للزمرة سم بالنسبة للاقتارات المحافظة . فلنبدأ بدراسة زمرة الجمع Z والزمرة الجزئية الطبيعية $Z = \{ \text{ر} : \text{ر} \}$.

مسألة :

٢. لتكن $n = 5$. اكتب قائمة بالمجموعات المرافقة المختلفة للزمرة الجزئية Z_5 في زمرة الجمع Z :

$$Z_5 + 0 = \underline{\hspace{2cm}}$$

اذكر العلاقة بين هذه المجموعات المرافقة وصفوف التكافؤ

$$0, 1, 2, 3, 4 \text{ الخ في } Z$$

ب. لأي عدد صحيح موجب n اثبت انه لكل $Z \ni p$

تكون المجموعة المرفقة $p + Z$ مساوية لصف التكافؤ p

ج. اذا كانت p, q فاوجد المجموعة المرافقة $s + Z$ المقابلة للمجموع

$$p + q \text{ في الزمرة } Z$$

$$\text{وتكتب بصيغة المجموعات المرافقة نكتب } (p + Z) + (q + Z) = \underline{\hspace{2cm}}$$

ولهذا نرى ان للزمرة Z والزمرة الجزئية Z تكون مجموعة المجموعات المرافقة

$\{Z, p + Z\}$ زمرة هي بعينها الزمرة Z ، بالنسبة لعملية جمع المجموعات المرافقة المعرفة بالصيغة :

$$(p + Z) + (q + Z) = (p + q) + Z$$

لنستعمل Z كنموذج لبناء زمرة من زمرة معطاة p وزمرة جزئية طبيعية p .

تعريف :

لأي زمرة p وزمرة جزئية طبيعية p لتكن p/p المجموعة المكونة من كل المجموعات المرافقة اليمنى

المختلفة لـ p في p . فيكون $p/p = \{p/p, p/p, \dots\}$. و يقرأ الرمز p/p غالباً: « p على p ».

نريد ان نعرف عملية على المجموعات المرافقة لـ p تجعل p/p زمرة.

وباتباع مثال المسألة ٨٦ تعرف $(p/p) \circ (q/p) = (p + q)/p$ بانها المجموعة المرافقة $(p + q)$ ص لكل p, q

ولهذا فلكل p, q ب p

$$(p/p) \circ (q/p) = (p + q)/p$$

مسألة :

لتكن $p = D$ زمرة تماثلات المربع ولتكن p الزمرة الجزئية الطبيعية $\{1, 2, 3, 4\}$.

٢. جد دليل p في p واكتب قائمة بالعناصر المختلفة لـ p/p (أي المجموعات المرافقة المختلفة لـ p في p).

ب. احسب $(p/p) \circ (p/p)$ كما هو معرف اعلاه.

ج. اثبت ان $p/p = p/p \circ p/p = p/p \circ p/p = p/p$ و

$$(p/p) \circ (p/p) = (p/p) \circ (p/p) = (p/p) \circ (p/p)$$

و يبين هذا ان العملية معرفة تعريفاً حسناً، على الاقل لهذه المجموعات المرافقة الخاصة.

- د. اعمل جدول عملية للمجموعة $S/\sim$ مستخدماً التعريف اعلاه للمجموعة $(S^0, \sim)$.
 تذكر ان تستعمل فقط المجموعات المرافقة لـ $\sim$ في جدولك .
 هـ جد عنصراً محايداً ومعكوساً لكل عنصر في $D/\sim$.

لنعد الان الى المسألة العامة . لتكن S زمرة ، $\sim$ زمرة جزئية طبيعية و $S/\sim$ المجموعة المكونة من المجموعات المرافقة المختلفة لـ $\sim$ في S . لقد عرفنا عملية $\circ$ على $S/\sim$ بوضع $(S^0, \sim)$ $(S^0, \sim) = (S^0, \sim)$ لكل $a, b \in S$.
 فاذا كان $(S^0, \sim)$ ، $(S^0, \sim)$ ، $(S^0, \sim)$ $\circ$ $(S^0, \sim)$ $\circ$ $(S^0, \sim)$ يكون عملية ثنائية على $S/\sim$ معرفة تعريفاً حسناً فيجب ان تعين لكل زوج من المجموعات المرافقة في $S/\sim$ مجموعة مرافقة واحدة في $S/\sim$ بالضبط و يجب الا يعتمد هذا التعيين على الاختيار الخاص لتمثيل المجموعات المرافقة . وحقيقة ان العملية معرفة تعريفاً حسناً تبرهن عليها المسألة التالية .

مسألة :

لتكن $\sim$ زمرة جزئية طبيعية من الزمرة S ولتكن $a, b, c \in S$ ،
 اثبت انه اذا كانت $a \sim b$ و $b \sim c$ $\Rightarrow a \sim c$ فان
 $(S^0, \sim) \circ (S^0, \sim) = (S^0, \sim)$
 ومن ثم فان

$$(S^0, \sim) \circ (S^0, \sim) = (S^0, \sim) \circ (S^0, \sim) \quad \blacktriangle$$

وبما اننا نعرف الآن انه توجد عملية ثنائية على $S/\sim$ معرفة تعريفاً حسناً اذا كانت $\sim$ زمرة جزئية طبيعية فيمكننا برهان ان $S/\sim$ تكون زمرة بالنسبة لهذه العملية .

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن $(S, \circ)$ زمرة و $\sim$ زمرة جزئية طبيعية من S فتكون $(S/\sim, \circ)$ زمرة . تسمى الزمرة $S/\sim$ التي تتكون من جميع المجموعات المرافقة المختلفة من $\sim$ في S بالزمرة الخارجة .

اذا كانت $(S, \circ)$ زمرة جمع فيكتب حاصل جمع مجموعتين مرافقتين $a + b$ و $b + a$ بالصيغة

$$(a + b) \circ (b + a) = (a + b) \circ (b + a)$$

واذا كانت $(S, \circ)$ زمرة ضرب غالباً ما تكتب $a \cdot b$ بالصيغة $a \cdot b$ وحاصل ضرب مجموعتين مرافقتين

$a \cdot b$ و $b \cdot a$ في $S/\sim$ بالصيغة

$$(a \cdot b) \circ (b \cdot a) = (a \cdot b) \circ (b \cdot a)$$

مسألة :

١. اختر زمرة جزئية رتبها اربعة من زمرة الجمع Z_{12} اكتب قائمة المجموعات المرافقة المختلفة للزمرة $\mathbb{Z}_{12}$ واعمل جدول جمع الزمرة الخارجة $Z_{12}/\mathbb{Z}_4$. استعمل في جدولك الرموز 12^* + $\mathbb{Z}_4$ الخ لعناصر الزمرة $Z_{12}/\mathbb{Z}_4$.

ب. برهن ان $(\mathbb{Z}_{12}/\mathbb{Z}_4, +)$ تكون متشاكله مع الزمرة المألوفة _____
اذا كانت $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ زمرة منتهية و $\mathbb{Z}_4$ زمرة جزئية طبيعية من $\mathbb{Z}_{12}$ فتوجد علاقة مهمة بين رتبة الزمرة $\mathbb{Z}_{12}$ ورتبة الزمرة الجزئية الطبيعية $\mathbb{Z}_4$ ورتبة الزمرة الخارجة $\mathbb{Z}_{12}/\mathbb{Z}_4$.

مسألة :

لتكن $\mathbb{Z}_n$ زمرة منتهية و $\mathbb{Z}_m$ زمرة جزئية طبيعية من $\mathbb{Z}_n$.
عبر عن رتبة الزمرة الخارجة $\mathbb{Z}_n/\mathbb{Z}_m$ بدلالة رتبة $\mathbb{Z}_m$ ورتبة $\mathbb{Z}_n$.
هناك علاقة وثيقة بين العملية على الزمرة $\mathbb{Z}_n$ والعملية على الزمرة الخارجة $\mathbb{Z}_n/\mathbb{Z}_m$ من $\mathbb{Z}_n$ بالزمرة الجزئية الطبيعية $\mathbb{Z}_m$. والواقع انه يوجد اقتران طبيعي $f: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_m$ من الزمرة $\mathbb{Z}_n$ الى الزمرة الخارجة $\mathbb{Z}_n/\mathbb{Z}_m$ الذي يعين لكل عنصر $a \in \mathbb{Z}_n$ المجموعة المرافقة $a + \mathbb{Z}_m$ المحتوية على a .
وكمثال على هذا الاقتران لنعتبر زمرة الجمع $\mathbb{Z}_{12}/\mathbb{Z}_4$.
عرف $\pi: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}/\mathbb{Z}_4$ بوضع $\pi(a) = a + \mathbb{Z}_4$ $(a \in \mathbb{Z}_{12})$
لكل $a \in \mathbb{Z}_{12}$. ولقد لاحظنا ان π اقتران محافظ وشامل من $\mathbb{Z}_{12}$ الى $\mathbb{Z}_{12}/\mathbb{Z}_4$ وان $\pi^{-1}(a + \mathbb{Z}_4) = a + \mathbb{Z}_4$.
(انظر المسألتين ٤٤ و ٤٦).

مسألة :

وكمثال ثان لناخذ زمرة تماثلات المربع D_8 والزمرة الجزئية الطبيعية $\mathbb{Z}_4 = \langle u, v \rangle$. عرف $\pi: D_8 \rightarrow D_8/\mathbb{Z}_4$ بوضع $\pi(a) = a + \mathbb{Z}_4$ لكل $a \in D_8$.
١. صف π بايجاد $\pi(a)$ لكل $a \in D_8$.
ب. هل تكون π اقتراناً شاملاً من D_8 الى $D_8/\mathbb{Z}_4$ ؟
ج. جد $\pi^{-1}(a + \mathbb{Z}_4)$.
لنذكر الآن النظرية العامة.

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن $\mathbb{Z}_n$ زمرة جزئية طبيعية من الزمرة $\mathbb{Z}_m$.
عرف $\pi: \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m/\mathbb{Z}_n$ بوضع $\pi(a) = a + \mathbb{Z}_n$ لكل $a \in \mathbb{Z}_m$.

فيكون

١. اقتراناً محافظاً .
- ب. اقتراناً شاملاً من s الى s/s .
- ح. نواة ٢٦ هي الزمرة الجزئية الطبيعية s/s . ▲

يسمى الاقتران المحافظ ٢٦ : $s/s - s/s$ المعروف في النظرية ٩٤ بالاقتران المحافظ القياسي وتسمى الزمرة الخارجة s/s بالصورة المحافظة لـ s/s لانه يوجد اقتران محافظ وشامل من s/s الى s/s . وفي البند القادم سنواصل دراستنا لزمري يمكن ان تكون صوراً محافظة من s/s (اي الزمر s/s التي يوجد لها اقتران محافظ وشامل من s/s الى s/s).

تمارين :

١. في الزمرة $(S, \cdot)$ (٥) اختر زمرة جزئية طبيعية رتبها ثلاثة .
٢. اعمل جدول عملية الزمرة الخارجة s/s .
- ب. برهن ان s/s تكون متشاكلة مع الزمرة المألوفة _____
٢. اختر زمرة جزئية طبيعية s/s رتبها ثلاثة في زمرة الجمع Z_{18} .
٢. اعمل جدول عملية الزمرة الخارجة s/s .
- ب. برهن ان $Z_{18}/s/s$ تكون متشاكلة مع الزمرة المألوفة _____
٣. لتكن $(s, \cdot)$ زمرة .
٢. برهن ان الزمرة الخارجة s/s / $\{و\}$ تكون متشاكلة مع s/s .
- ب. صف العناصر المختلفة للزمرة الخارجة s/s .
٤. * لتكن s/s ، s/s زمريتين وليكن ϕ اقتراناً محافظاً وشاملاً من s/s الى s/s و s/s زمرة جزئية طبيعية

من s/s .

$$\overline{s/s} = \{ \phi(r) : r \in s/s \} . \text{ فتكون}$$

$\overline{s/s}$ زمرة جزئية طبيعية من s/s (التمرين ٢,٧ - ٨) عرف

$$\overline{\phi} : s/s \rightarrow s/s / \overline{s/s} \text{ بوضع}$$

$$\overline{\phi}(s/s) = \phi(s/s) \text{ اثبت ان}$$

١. $\overline{\phi}$ اقتران معرف تعريفاً حسناً

ب. $\overline{\phi}$ اقتران محافظ

ح. $\overline{\phi}$ اقتران شامل : من s/s الى s/s .

٥. لتكن $(s, \cdot)$ زمرة ، s/s زمرة المتبادلات الجزئية من s/s (انظر التمرين ٢,٧ - ١٢) .

اثبت ان الزمرة الخارجة s/s / s/s تكون تبديلية .

٦. لتكن $(s, \cdot)$ زمرة و s/s زمرة جزئية طبيعية من s/s .

- اثبت انه اذا كانت s/p تبديلية فان s تحتوي على زمرة المتبادلات الجزئية من s .
٧. ان السؤال الطبيعي الذي يسأل في دراسة الزمر الخارجة يكون التالي : اذا كانت المجموعات المرافقة معرفة لأي زمرة جزئية فلماذا تكون الزمرة الخارجة معرفة فقط للزمر الجزئية الطبيعية ؟
- ان زمرة جزئية من D تساعد في الاجابة على هذا السؤال وذلك باثبات ان العملية المقترحة في المجموعة s/p لا تكون معرفة تعريفاً حسناً اذا لم تكن s طبيعية . لتكن $s = \langle u, v \rangle$.
- أ. هل s طبيعية في D ؟
- ب. اثبت ان $s^p = s$ و $s^q = s$ و $s^r = s$.
- ج. اثبت ان المجموعتين المرافقتين (s^p) و (s^q) غير متساويتين .
- د. هل $(s^p) \cap (s^q) = (s^r)$ ؟
٨. لتكن s زمرة و s زمرة جزئية من s و s/p المجموعة المكونة من المجموعات المرافقة اليمنى لـ s في s . لقد لاحظنا انه اذا كانت s زمرة جزئية طبيعية من s فان التناظر $(s^p, s^q) \mapsto (s^r)$ يعرف عملية ثنائية على s/p تعريفاً حسناً .
- برهن العكس : اذا كان التناظر يعرف عملية ثنائية على s/p تعريفاً حسناً فتكون s زمرة جزئية طبيعية من s . ●
٩. وينشأ سؤال طبيعي آخر عن دراسة الزمر الخارجة هو التالي :
- اذا كانت s زمرة جزئية طبيعية من زمرة s فما هي الخصائص التي تأخذها s/p من s ؟
- حقق فيما اذا كانت العبارات التالية صحيحة ام خطأ . اذا كانت صحيحة فاعط برهاناً لها واذا كانت خطأ فاعط مثالاً معاكساً .
- لتكن s زمرة جزئية طبيعية من (s, o) .
١. اذا كانت s تبديلية فان s/p تبديلية .
- ب. اذا كانت s دورية فتكون s/p دورية .
- ج. اذا كانت s لا نهائية فتكون s/p لا نهائية .
١٠. * لتكن (s, o) زمرة و s زمرة جزئية طبيعية من s و (s, o) .
- أ. اثبت ان رتبة s^p في s/p تقسم رتبة s في s .
- ب. اثبت انه اذا كان b عدداً اولياً ، s^b و (s^b) = s في s/p فيوجد عنصر u رتبته تساوي b .
١١. * اثبت نظرية كوشي للزمر التبديلية : اذا كانت (s, o) زمرة تبديلية منتهية وكان b عدداً اولياً يقسم رتبة s فيوجد s^b - $\{u\}$ حيث ان $u^b = o$. ●

٢,٩ الصور المحافظة والزمرة الخارجة

لاحظنا في البند السابق ان الاقتران الطبيعي ϕ من $\mathcal{H}$ الى $\mathcal{H}$ للعنصر ϕ من الزمرة $\mathcal{H}$ الى مجموعة المرافقة $\mathcal{H}$ من زمرة جزئية طبيعية كان اقتراناً محافظاً شاملاً من الزمرة $\mathcal{H}$ الى الخارج $\mathcal{H}/\mathcal{H}$.

وبصورة عامة اذا كان ϕ اقتراناً محافظاً وشاملاً من زمرة $\mathcal{H}$ الى زمرة $\mathcal{H}$ تكون نو (ϕ) زمرة جزئية طبيعية من $\mathcal{H}$. وهكذا فان هذا الاقتران المحافظ يعين زمرة جزئية طبيعية $\mathcal{H}$ من $\mathcal{H}$ وزمرة خارجة $\mathcal{H}/\mathcal{H}$. وفي هذا البند نريد ان نقارن بين الزمرة الخارجة $\mathcal{H}/\mathcal{H}$ مع زمرة الصورة $\mathcal{H}$.

تعريف :

تكون الزمرة $(\mathcal{H}, *)$ صورة محافظة للزمرة $(\mathcal{H}, \circ)$ اذا وفقط اذا وجد اقتران محافظ وشامل من $\mathcal{H}$ الى $\mathcal{H}$ (اي اقتران محافظ $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ يحقق $\phi(\phi) = \phi$).

مسألة :

عرف اقتراناً شاملاً ϕ من $(\mathcal{H}, +)$ الى $(\mathcal{H}, +)$ بوضع $\phi(a) = a$ لكل $a \in \mathcal{H}$.

أ. برهن ان ϕ اقتران محافظ وشامل من $\mathcal{H}$ الى $\mathcal{H}$.

وبذا تكون $\mathcal{H}$ صورة محافظة للصورة $\mathcal{H}$.

ب. جد العناصر في $\mathcal{H}$ = نو (ϕ) .

ج. بين ان لكل عنصر $b \in \mathcal{H}$ $\phi(b) = b$ يكون $\phi(b) = b$.

د. برهن ان $\mathcal{H}/\mathcal{H}$ تكون متشاكله مع $\mathcal{H}$. انظر المسألة ٩١ لجداول الجمع للزمرة $\mathcal{H}/\mathcal{H}$.

ان التمهيدية التالية للاقترانات المحافظة مفيدة ليس في برهان النظرية ١٠١ ادناه فحسب وانما ايضاً في حل المعادلات الخطية (انظر التمرين ٢).

اترك برهان التمهيدية ٩٧ والنتيجة ٩٨ للتمرين ١.

تمهيدية :

لتكن $(\mathcal{H}, \circ)$ و $(\mathcal{H}, *)$ زميرتين وليكن $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ اقتراناً محافظاً.

ولتكن $a \in \mathcal{H}$ فيكون $\phi(a) = a$ اذا وفقط اذا كان $a = a$ حيث a عنصر ما $\in \mathcal{H}$.

نتيجة :

ليكن $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ اقتراناً محافظاً من زمرة $(\mathcal{H}, \circ)$ الى زمرة $(\mathcal{H}, *)$.

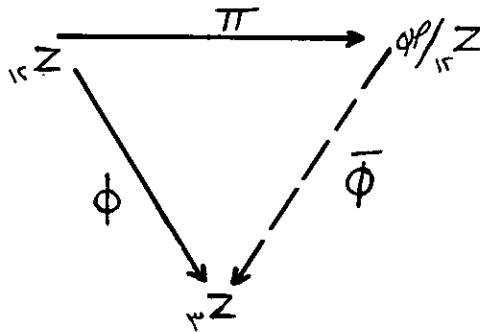
ولتكن $a \in \mathcal{H}$ = نو (ϕ) . فيكون $\phi(a) = a$ اذا وفقط اذا كان $a \in \mathcal{H}$ أو ما يكافئه $a = a$.

مسألة :

لنفحص الاقتران المحافظ $\pi : Z \leftarrow Z$
 المعرف بوضع $\pi (f) = f$ أن لكل $f \in Z$. اجعل $f \in Z$ ثابتاً واستخدم التمهيدية ٩٧ والنتيجة ٩٨ لاثبات أن $\pi (b) = f$ أن اذا وفقط اذا كان $b = f + r$ حيث $r \in Z$. وزيادة على ذلك فإن $\pi (b) = \pi (f)$ اذا وفقط اذا كان $b = f + z$.
 لاحظنا من المسألة ٩٦ انه اذا كانت $\phi : Z \leftarrow Z$ معرفة بوضع $\phi (f) = (f) = f$ لكل $f \in Z$ و $\phi = \text{نو}(\phi)$ تكون ϕ / Z متشاكله مع Z .
 وفي برهنة وجود تشاكل قد تكون استخدمت التناظر $f + \phi = \phi + f$.
 فلندرس هذا التناظر .

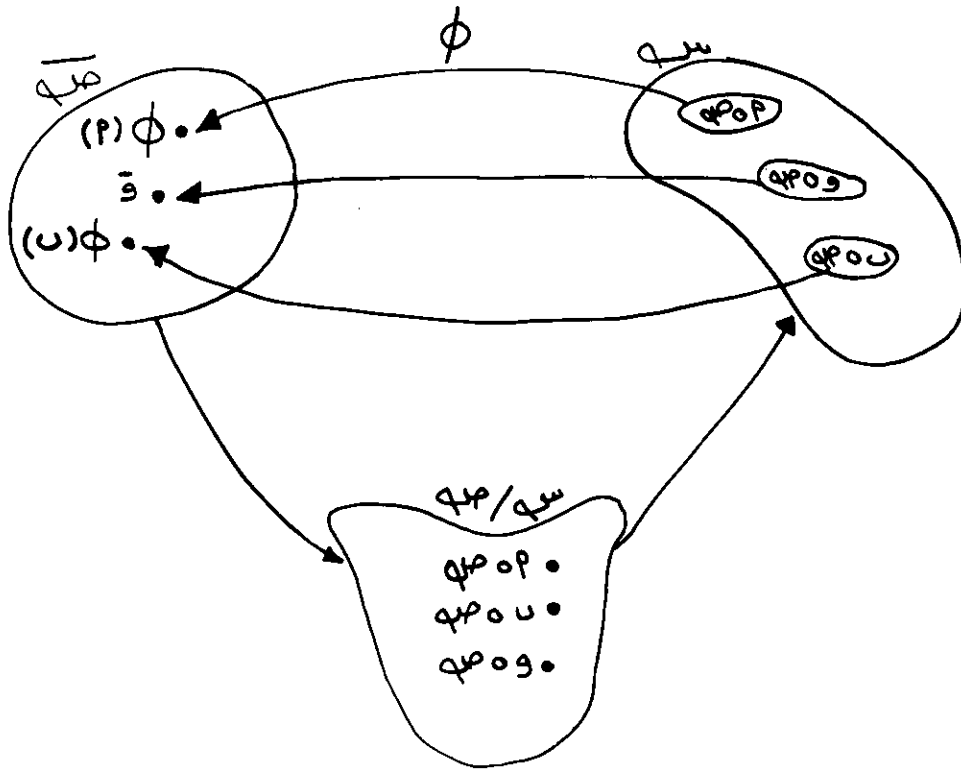
مسألة :

عرف $\bar{\phi} : Z \leftarrow Z$ بوضع $\bar{\phi} (f) = (f) + \phi$.
 احسب $(f) + \phi$ لكل مجموعة مرافقة مختلفة $f + \phi$ في Z / ϕ .
 استخدم التمهيدية ٩٧ لتثبت أن $\bar{\phi}$ تكون اقتراناً معرفاً تعريفاً حسناً (اي انه اذا كانت $f + \phi = g + \phi$ فإن $\bar{\phi} (f) = \bar{\phi} (g)$) .
 (انظر الشكل ٢,٥) .



شكل ٢,٥

- اثبت أن ϕ تكون اقتراناً محافظاً .
 - جد نو $(\bar{\phi})$.
 - اثبت أن $\bar{\phi}$ تكون تشاكلاً من Z / ϕ الى Z .
- لتكن (ϕ, ϕ) و (ϕ, ϕ) زميرتين وليكن ϕ اقتراناً محافظاً وشاملاً من ϕ الى ϕ و $\phi = \text{نو}(\phi)$ فتخبرنا التمهيدية ٩٧ والنتيجة ٩٨ أن كل عنصر من المجموعة المرافقة $\phi + \phi$ ($f \in \phi$) وانه اذا كانت $\phi + \phi \neq \phi + \phi$ فإن $\phi (f) \neq \phi (f)$. وبهذا فإن العنصر $\phi + \phi$ من زمرة الخارج ϕ / ϕ يتناظر مع العنصر $\phi (f)$ من ϕ . فنريد ان نبرهن ان التناظر $\phi + \phi \leftarrow \phi (f)$ من ϕ / ϕ الى ϕ يكون اقتراناً هو في الواقع تشاكل . (انظر الشكل ٢,٦) .



شكل ٢,٦

نظرية :

نظرية التشاكل الاولى للزمر . ليكن ϕ اقتراناً محافظاً وشاملاً من الزمرة (سه، ٥) الى الزمرة (سه، *).

لتكن صه = نو (ϕ) فان سه تشاكل زمرة الخارج سه/صه.
برهن النظرية حسب خطوات حل المسألة التالية :

مسألة :

(لتكن (سه، ٥) ، (سه، *) زميرتين وليكن ϕ : سه $\leftarrow$ سه اقتراناً محافظاً شاملاً من سه الى سه
فاذا كان صه = نو (ϕ) ، عرف $\bar{\phi}$: سه/صه $\leftarrow$ سه بوضع $\bar{\phi} = (\phi^{\circ 2})$ لكل $\phi^{\circ 2} \in سه$.
(انظر الشكل ٢,٧).

٢. بين ان $\bar{\phi}$ اقتران معرف تعريفاً حسناً (اي انه اذا كانت $صه^{\circ 2} = ب^{\circ 2}$ فان $\bar{\phi} = \bar{\phi}$)
 $\bar{\phi} = (\phi^{\circ 2})$ (ب.صه).

ب. برهن ان $\bar{\phi}$ اقتران محافظ

ج. جد نو ($\bar{\phi}$) (اي جد كل العناصر سه سه بحيث ان $\bar{\phi} = (سه^{\circ 2}) = \bar{\phi}$)

د. بين ان $\bar{\phi}$ واحد لواحد.

هـ. بين ان ϕ اقتران شامل من سه/صه الى سه.

اكتب قائمة بعناصر $Z_{13}/\langle 3 \rangle$ واعمل جدول الجمع للزمرة $Z_{13}/\langle 3 \rangle$ وجد زمرة مألوفة بحيث تكون متشاكلة مع $Z_{13}/\langle 3 \rangle$.

ب. جد كل الزمر غير المتشاكلة التي تكون صوراً محافظة للزمر $(Z_{13}, +)$.
مسألة :

١. لتكن الزمرة $(S_n, +)$ صورة محافظة لزمرة منتهية $(S_n, \circ)$. جد علاقة بين رتبة S_n .

ب. استخدم العلاقة في ١ لتعيين أي من الزمر $(Z_n, +)$ يمكن أن تكون صوراً محافظة من $(Z_{10}, +)$.

تمارين :

١. اثبت التمهيدية ٩٧ والنتيجة ٩٨.

٢. عرف $\phi : M(R) \rightarrow M(R)$ - بوضع $\phi(s) = s^e$ حيث $e \in M(R)$ مصفوفة ثابتة.

١. بين أن ϕ تكون اقتراناً محافظاً من $(M(R), +)$ إلى نفسها.
ب. لتكن

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = e$$

جد نو (ϕ) ، بهذا الاختيار للمصفوفة e .

ح. بين أن

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \phi(s)$$

تكون حلاً للمعادلة $\phi(s) = s$

حيث اخترنا e كما في ب. استخدم التمهيدية ٩٧ لبيان أن ϕ

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \phi(s)$$

إذا وفقط إذا كانت

$$\begin{pmatrix} B+3 & \alpha+2 \\ B^2+2 & \alpha^2+1 \end{pmatrix} = s$$

حيث $\alpha \in R$ ، وبذا فإن منظومة المعادلات

$$\begin{aligned} 2s &= e - 5 \\ 2v &= n - 4 \\ 2s - 5 &= e - \\ 2v - 4 &= n - \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4- & 5- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & s \\ n & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1- & 2 \\ 1 & 2- \end{pmatrix} \quad \text{أو}$$

له الحل $s = 2 + \alpha$ ، $v = 2 + \beta$ ، $e = 1 + 2\alpha$ ، ون $2 + 2\beta = \alpha$ لكل $\alpha, \beta \in R$.
والواقع ان هذه الطريقة ليست ضرورية في حالة المصفوفات 2×2 ولكنها مفيدة جداً مع منظومات اوسع من المعادلات الخطية ومع المعادلات التفاضلية .

٣ - لتكن (s, e) زمرة ترتبتها b ، حيث b عدد أولي : ولتكن (s, e) صورة محافظة لـ s . بين انه اما ان تكون $s = \{e\}$ أو ان تكون s متشاكلة مع s .
اعط برهانين مختلفين لهذه الفرضية احدهما باستخدام نظرية التشاك الأولى (النظرية ١٠١)

٤ - في زمرة ما s يمكن ان يوجد اثنتان (او اكثر) من الزمر الجزئية الطبيعية s و e بحيث ان s/s تكون متشاكلة مع e/e .
اعط مثالا لهذه الظاهرة في D_8 .

٥ - لتكن $R \times R = {}^2R$ وليكن الجمع معرفاً بالصيغة
 $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$ لكل $(a, b), (c, d) \in {}^2R$
 ١. لتكن $s = \{(s, v) : s = e\}$ فتكون s زمرة جزئية طبيعية من ${}^2R$ ويمكن تمثيل ${}^2R/s$ بالمجموعة المكونة من المستقيمات $s = r$ حيث $r \in R$.
 بين ان ${}^2R/s$ تكون متشاكلة مع الزمرة $s = \{(s, v) : v = e\}$.
 لعمل ذلك جد اقتراناً محافظاً وشاملاً $\emptyset$ من ${}^2R$ الى s حيث نو $(\emptyset)$ هي المجموعة الجزئية المعطاة s واستخدام نظرية التشاكل الاولى .

ب. ثبت $\emptyset \in R$ - $\{e\}$. وعرف $\emptyset : {}^2R$ الى R . بوضع $\emptyset = (s, v) = s - v$: بين أن $\emptyset$ اقتراناً محافظاً شامل من ${}^2R$ إلى R جد نو $(\emptyset)$ وصف نو $(\emptyset)$ هندسياً.
 ج. ثبت $\emptyset \in R$ - $\{e\}$ ولتكن $s = \{(s, v) : s = v\}$ بين ان ${}^2R/s$ تكون متشاكلة مع R .

٦ - لتكن s زمرة الجمع $M(R)$ ولتكن s الزمرة الجزئية المكونة من المصفوفات القطرية :

$$\left\{ R \ni d, f : \begin{pmatrix} \cdot & f \\ d & \cdot \end{pmatrix} \right\} = \varphi$$

$$\left\{ R \ni d, b : \begin{pmatrix} b & \cdot \\ \cdot & d \end{pmatrix} \right\} = \bar{\varphi}$$

٢. برهن ان $\varphi/\bar{\varphi}$ تكون متشاكلة مع $\bar{\varphi}$. لعمل ذلك جد اقتراناً محافظاً وشاملاً من S الى $\bar{S}$ بحيث ان نو (ϕ) هي المجموعة الجزئية φ المعطاة واستخدام نظرية التشاكل الاولى.

ب. صف التشاكل $\bar{\phi} : S/\varphi \leftarrow \bar{S}$ المعروف في المسألة ١٠٢. لعمل ذلك ، لتكن

$$\begin{pmatrix} \cdot & f \\ d & \cdot \end{pmatrix} = \varepsilon$$

احسب $\bar{\phi}(\varepsilon + \varphi)$

ح. لتكن ε اي عنصر من المجموعة المرافقة $\varepsilon + \varphi$.
عبر عن ε بدلالة ε واحسب بعد ذلك $\bar{\phi}(\varepsilon + \varphi)$.

$$V - \text{المجموعة} \quad \left\{ R \ni d, b : \begin{pmatrix} b & f \\ \cdot & d \end{pmatrix} \right\} = \varepsilon$$

المكونة من كل المصفوفات المثلثية العليا تكون زمرة جزئية من زمرة الجمع $M(R)$.
جد زمرة جزئية ملائمة $\bar{S}$ من $M(R)$ وبرهن ان $M(R)/\bar{S}$ تكون متشاكلة مع $\bar{S}$.
(اذا كان هناك شك حول الطريقة ، انظر التمرين ٦)

٨. لتكن $S, \varphi, \bar{S}$ المجموعات الجزئية التالية من $M(R)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cdot & f \\ d & \cdot \end{pmatrix} : R \ni d, \cdot, b, f \text{ و } ad - b \cdot < 0 \right\} = S$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cdot & f \\ f & \cdot \end{pmatrix} : R \ni f, \cdot < 0 \right\} = \varphi$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} b & f \\ d & \cdot \end{pmatrix} : R \ni d, \cdot, b, f \text{ و } ad - b \cdot = 1 \right\} = \bar{S}$$

٢. برهن ان $\bar{s}$ تكون زمرة جزئية لزمرة الضرب ل المكونة من كل المصفوفات 2×2 غير المنفردة .

ب. برهن ان $\bar{s}$ تكون زمرة جزئية طبيعية من $\bar{s}$.

ح. برهن ان $(\bar{s}, 0)$ تكون زمرة .

٩. لتكن $\bar{s}$ ، $\bar{v}$ و $\bar{w}$ زمر الضرب المعرفة في التمرين ٨

١ عرف اقتراناً $\phi: \bar{s} \rightarrow \bar{w}$ بوضع

$$\begin{pmatrix} \bar{b} & \bar{s} \\ \bar{d} & \bar{hs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b} & \bar{p} \\ \bar{d} & \bar{h} \end{pmatrix} \phi$$

حيث $\bar{s}$ عدد مناسب يعتمد على المصفوفة

$$\begin{pmatrix} \bar{b} & \bar{p} \\ \bar{d} & \bar{h} \end{pmatrix} \in \bar{w}$$

اختر العدد $\bar{s}$ بحيث ان

$$\begin{pmatrix} \bar{b} & \bar{p} \\ \bar{d} & \bar{h} \end{pmatrix} \in \bar{w}$$

ب. برهن انه بالاختيار المناسب للعدد الحقيقي $\bar{s}$ لكل مصفوفة $\bar{v}$ يكون الاقتران

ϕ اقتراناً محافظاً شاملاً من $\bar{s}$ الى $\bar{w}$.

ح. برهن ان $\bar{s}/\bar{v}$ تكون متشاكلة مع $\bar{w}$.

١٠. ١. جد اقتراناً محافظاً وشاملاً من $(+, \bar{z})$ الى $(+, \bar{w})$.

ب. برهن وجود اوعدم وجود اقتران محافظ وشامل من $(+, \bar{z})$ الى $(+, \bar{w})$.

١١. ٢. لتكن $\bar{z}$ عدداً صحيحاً موجباً ثابتاً . عين كل الزمر غير المتشاكلة التي تكون صوراً

محافضة للزمرة $(+, \bar{z})$. اجعل عبارتك صريحة . لتكن $\bar{p}, \bar{q}, \dots$ كل عوامل

ن المختلفة وري ١.

استعمل هذه الاعداد الصحيحة في وصف الصور المحافضة في $\bar{z}$.

ب. اكمل العبارة التالية ثم برهنها : ليكن $\bar{m}$ ، $\bar{n}$ عددين صحيحين موجبين بحيث ان $\bar{m}$

$\geq \bar{n}$. فتكون $(\bar{m}, +)$ صورة محافضة من $(\bar{n}, +)$ اذا وفقط اذا كان

١٢. عين كل الزمر غير المتشاكلة التي تكون صوراً محافضة للزمرة $(\bar{s}, 0)$.

١٣. لتكن (س، +) زمرة تبديلية و ص مجموعة غير خالية .

لتكن ق (ص، س) المجموعة المكونة من كل الاقترانات .

ق: ص ← س . الجمع ق + ك للاقترانين .

ق، ك : ق (ص، س) معرفة بوضع

(ق + ك) (س) = ق (س) + ك (س)

لكل س ص . فتكو (ق (ص، س) ، +) زمرة . (انظر التمرين ١٠-١،٥)

١. ليكن ص عنصر ثابتاً وليكن

$$ع = \{ ق : ق : ق (ق (ص، س) ، س) \text{ و } ق (ق (ص، س) ، س) = 0 \}$$

بين ان ع تكون زمرة جزئية طبيعية من ق (ص، س).

ب. ليكن ص ثابتاً . عرف اقتراناً م : ق (ص، س) ← س بوضع م (ق) = ق (ق (ص، س) ، س) . اثبت ان م تكون اقتراناً محافظاً وشاملاً من ق (ص، س) الى س ثم جد نواة م .

ح. بين ان ق (ص، س) / ع تكون متشاكلة مع س.

١٤. لتكن ع و ص زميرتين جزئيتين طبيعيتين من الزمرة (س، +) فتكون المجموعة ع • ص

$$ع \bullet ص = \{ ع : ع : ع (ع (ص، س) ، س) \}$$

مجموعة جزئية طبيعية من س (التمرين ٢،٧-١٦) . نريد ان نبين ان (ع • ص) / ع تكون متشاكلة مع ع / (ع ∩ ص) . وتعرف هذه النتيجة بنظرية التشاكل الثانية للزمير.

١. برهن ان ص تكون زمرة جزئية طبيعية من ع • ص وان ع ∩ ص تكون زمرة جزئية طبيعية من ع .

ب. عرف م : ع ← (ع • ص) / ع بوضع

$$م (ع) = (ع • ص) / ع \text{ برهن ان } م \text{ تشاكل من } ع \text{ الى } (ع • ص) / ع .$$

جد نواة م .

ح. برهن ان (ع • ص) / ع تكون متشاكلة مع ع / (ع ∩ ص)

د. برهن انه اذا كانت ع ∩ ص = { 0 } فان (ع • ص) / ع تكون متشاكلة مع ع .

هـ. في م (R) ، لتكن

$$ع = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : 1 \leq n \leq R \right\} \text{ و}$$

$$ص = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : 1 \leq n \leq R \right\}$$

فتكون $\mathcal{E}$ و $\mathcal{V}$ زميرتين جزئيتين طبيعيتين . استخدم نظرية التشاكل الثانية (الجزء
 ح اعلاه) لتبرهن ان $\mathcal{M}_R/\mathcal{V}$ متشاكله مع $\mathcal{E}$.
 و. في $\mathcal{M}_R$ ، لتكن

$$\left\{ \mathcal{E} = \left(\begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array} \right) : \mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{D} \in R \right\}$$

$$\left\{ \mathcal{V} = \left(\begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array} \right) : \mathcal{Q}, \mathcal{C}, \mathcal{K} \in R \right\}$$

برهن ان $\mathcal{M}_R/\mathcal{V}$ تكون متشاكله مع $\mathcal{E}/\mathcal{E}$ حيث

$$\left\{ \mathcal{E} = \left(\begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array} \right) : \mathcal{P}, \mathcal{D} \in R \right\}$$

ثم برهن ان $\mathcal{M}_R/\mathcal{V}$ متشاكله مع الزمرة الجزئية

$$\left\{ \mathcal{B} \in R : \left(\begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array} \right) \right\}$$

٢,١٠ لمحة تاريخية

يتعلم الطالب في المدرسة الثانوية في موضوع الجبر ان للمعادلة $أس^2 + بس + ح = 0$ حيث $ا، ب، ح$ اعداد حقيقية، $ا \neq 0$ ، حل صيغته

$$\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \pm \frac{-b}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وهذه الصيغة تصح لأي من هذه المعادلات . وكل ما يتوجب عمله لإيجاد حل لمعادلة تربيعية خاصة (مثل $3x^2 - 5x + 0 = 0$) هو تعويض الأعداد بدل الحروف المناسبة في المعادلة.

كان حل المعادلة التربيعية معروفا للهندوس ونقله العرب الى العالم الغربي*.

والواقع ان كلمة (جبر) آتية من اسم كتاب الفه فلكي عربي . وقد وضع فيه حلول للمعادلات الخطية ($اس + ب = ٠$) وللمعادلة التربيعية . والاسم الاصلي «الجبر والمقابلة» ترجم في القرن الثاني عشر الى اللاتينية مطولا ثم اختصر الى «الجبر» فلفظة الجبر العربية آتية من جبر المعادلة اي حفظ توازن بنقل الحدود من كفة لأخرى . وتعني المقابلة التبسيط كتجميع الحدود في المعادلة.

وبالرغم من ان حلول المعادلات الخطية والتربيعية كانت معروفة عند الهنودوس والعرب فقد جهد الرياضيون لقرون عدة لايجاد صيغة يمكن ان تعطي الحلول للمعادلات الحدودية العامة.

$$\text{سم سن} + \text{سن} + \dots + \text{سن}^{n-1} + \text{سن}^n = \text{سم} + \text{سم} + \dots + \text{سم} + \text{سم} = (n+1) \text{سم}$$

حيث ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢، ١٣، ١٤، ١٥، ١٦، ١٧، ١٨، ١٩، ٢٠، ٢١، ٢٢، ٢٣، ٢٤، ٢٥، ٢٦، ٢٧، ٢٨، ٢٩، ٣٠، ٣١، ٣٢، ٣٣، ٣٤، ٣٥، ٣٦، ٣٧، ٣٨، ٣٩، ٤٠، ٤١، ٤٢، ٤٣، ٤٤، ٤٥، ٤٦، ٤٧، ٤٨، ٤٩، ٥٠، ٥١، ٥٢، ٥٣، ٥٤، ٥٥، ٥٦، ٥٧، ٥٨، ٥٩، ٦٠، ٦١، ٦٢، ٦٣، ٦٤، ٦٥، ٦٦، ٦٧، ٦٨، ٦٩، ٧٠، ٧١، ٧٢، ٧٣، ٧٤، ٧٥، ٧٦، ٧٧، ٧٨، ٧٩، ٨٠، ٨١، ٨٢، ٨٣، ٨٤، ٨٥، ٨٦، ٨٧، ٨٨، ٨٩، ٩٠، ٩١، ٩٢، ٩٣، ٩٤، ٩٥، ٩٦، ٩٧، ٩٨، ٩٩، ١٠٠، ١٠١، ١٠٢، ١٠٣، ١٠٤، ١٠٥، ١٠٦، ١٠٧، ١٠٨، ١٠٩، ١١٠، ١١١، ١١٢، ١١٣، ١١٤، ١١٥، ١١٦، ١١٧، ١١٨، ١١٩، ١٢٠، ١٢١، ١٢٢، ١٢٣، ١٢٤، ١٢٥، ١٢٦، ١٢٧، ١٢٨، ١٢٩، ١٣٠، ١٣١، ١٣٢، ١٣٣، ١٣٤، ١٣٥، ١٣٦، ١٣٧، ١٣٨، ١٣٩، ١٤٠، ١٤١، ١٤٢، ١٤٣، ١٤٤، ١٤٥، ١٤٦، ١٤٧، ١٤٨، ١٤٩، ١٥٠، ١٥١، ١٥٢، ١٥٣، ١٥٤، ١٥٥، ١٥٦، ١٥٧، ١٥٨، ١٥٩، ١٦٠، ١٦١، ١٦٢، ١٦٣، ١٦٤، ١٦٥، ١٦٦، ١٦٧، ١٦٨، ١٦٩، ١٧٠، ١٧١، ١٧٢، ١٧٣، ١٧٤، ١٧٥، ١٧٦، ١٧٧، ١٧٨، ١٧٩، ١٨٠، ١٨١، ١٨٢، ١٨٣، ١٨٤، ١٨٥، ١٨٦، ١٨٧، ١٨٨، ١٨٩، ١٩٠، ١٩١، ١٩٢، ١٩٣، ١٩٤، ١٩٥، ١٩٦، ١٩٧، ١٩٨، ١٩٩، ٢٠٠، ٢٠١، ٢٠٢، ٢٠٣، ٢٠٤، ٢٠٥، ٢٠٦، ٢٠٧، ٢٠٨، ٢٠٩، ٢١٠، ٢١١، ٢١٢، ٢١٣، ٢١٤، ٢١٥، ٢١٦، ٢١٧، ٢١٨، ٢١٩، ٢٢٠، ٢٢١، ٢٢٢، ٢٢٣، ٢٢٤، ٢٢٥، ٢٢٦، ٢٢٧، ٢٢٨، ٢٢٩، ٢٣٠، ٢٣١، ٢٣٢، ٢٣٣، ٢٣٤، ٢٣٥، ٢٣٦، ٢٣٧، ٢٣٨، ٢٣٩، ٢٤٠، ٢٤١، ٢٤٢، ٢٤٣، ٢٤٤، ٢٤٥، ٢٤٦، ٢٤٧، ٢٤٨، ٢٤٩، ٢٥٠، ٢٥١، ٢٥٢، ٢٥٣، ٢٥٤، ٢٥٥، ٢٥٦، ٢٥٧، ٢٥٨، ٢٥٩، ٢٦٠، ٢٦١، ٢٦٢، ٢٦٣، ٢٦٤، ٢٦٥، ٢٦٦، ٢٦٧، ٢٦٨، ٢٦٩، ٢٧٠، ٢٧١، ٢٧٢، ٢٧٣، ٢٧٤، ٢٧٥، ٢٧٦، ٢٧٧، ٢٧٨، ٢٧٩، ٢٨٠، ٢٨١، ٢٨٢، ٢٨٣، ٢٨٤، ٢٨٥، ٢٨٦، ٢٨٧، ٢٨٨، ٢٨٩، ٢٩٠، ٢٩١، ٢٩٢، ٢٩٣، ٢٩٤، ٢٩٥، ٢٩٦، ٢٩٧، ٢٩٨، ٢٩٩، ٣٠٠، ٣٠١، ٣٠٢، ٣٠٣، ٣٠٤، ٣٠٥، ٣٠٦، ٣٠٧، ٣٠٨، ٣٠٩، ٣١٠، ٣١١، ٣١٢، ٣١٣، ٣١٤، ٣١٥، ٣١٦، ٣١٧، ٣١٨، ٣١٩، ٣٢٠، ٣٢١، ٣٢٢، ٣٢٣، ٣٢٤، ٣٢٥، ٣٢٦، ٣٢٧، ٣٢٨، ٣٢٩، ٣٣٠، ٣٣١، ٣٣٢، ٣٣٣، ٣٣٤، ٣٣٥، ٣٣٦، ٣٣٧، ٣٣٨، ٣٣٩، ٣٤٠، ٣٤١، ٣٤٢، ٣٤٣، ٣٤٤، ٣٤٥، ٣٤٦، ٣٤٧، ٣٤٨، ٣٤٩، ٣٥٠، ٣٥١، ٣٥٢، ٣٥٣، ٣٥٤، ٣٥٥، ٣٥٦، ٣٥٧، ٣٥٨، ٣٥٩، ٣٦٠، ٣٦١، ٣٦٢، ٣٦٣، ٣٦٤، ٣٦٥، ٣٦٦، ٣٦٧، ٣٦٨، ٣٦٩، ٣٧٠، ٣٧١، ٣٧٢، ٣٧٣، ٣٧٤، ٣٧٥، ٣٧٦، ٣٧٧، ٣٧٨، ٣٧٩، ٣٨٠، ٣٨١، ٣٨٢، ٣٨٣، ٣٨٤، ٣٨٥، ٣٨٦، ٣٨٧، ٣٨٨، ٣٨٩، ٣٩٠، ٣٩١، ٣٩٢، ٣٩٣، ٣٩٤، ٣٩٥، ٣٩٦، ٣٩٧، ٣٩٨، ٣٩٩، ٤٠٠، ٤٠١، ٤٠٢، ٤٠٣، ٤٠٤، ٤٠٥، ٤٠٦، ٤٠٧، ٤٠٨، ٤٠٩، ٤١٠، ٤١١، ٤١٢، ٤١٣، ٤١٤، ٤١٥، ٤١٦، ٤١٧، ٤١٨، ٤١٩، ٤٢٠، ٤٢١، ٤٢٢، ٤٢٣، ٤٢٤، ٤٢٥، ٤٢٦، ٤٢٧، ٤٢٨، ٤٢٩، ٤٣٠، ٤٣١، ٤٣٢، ٤٣٣، ٤٣٤، ٤٣٥، ٤٣٦، ٤٣٧، ٤٣٨، ٤٣٩، ٤٤٠، ٤٤١، ٤٤٢، ٤٤٣، ٤٤٤، ٤٤٥، ٤٤٦، ٤٤٧، ٤٤٨، ٤٤٩، ٤٥٠، ٤٥١، ٤٥٢، ٤٥٣، ٤٥٤، ٤٥٥، ٤٥٦، ٤٥٧، ٤٥٨، ٤٥٩، ٤٦٠، ٤٦١، ٤٦٢، ٤٦٣، ٤٦٤، ٤٦٥، ٤٦٦، ٤٦٧، ٤٦٨، ٤٦٩، ٤٧٠، ٤٧١، ٤٧٢، ٤٧٣، ٤٧٤، ٤٧٥، ٤٧٦، ٤٧٧، ٤٧٨، ٤٧٩، ٤٨٠، ٤٨١، ٤٨٢، ٤٨٣، ٤٨٤، ٤٨٥، ٤٨٦، ٤٨٧، ٤٨٨، ٤٨٩، ٤٩٠، ٤٩١، ٤٩٢، ٤٩٣، ٤٩٤، ٤٩٥، ٤٩٦، ٤٩٧، ٤٩٨، ٤٩٩، ٥٠٠، ٥٠١، ٥٠٢، ٥٠٣، ٥٠٤، ٥٠٥، ٥٠٦، ٥٠٧، ٥٠٨، ٥٠٩، ٥١٠، ٥١١، ٥١٢، ٥١٣، ٥١٤، ٥١٥، ٥١٦، ٥١٧، ٥١٨، ٥١٩، ٥٢٠، ٥٢١، ٥٢٢، ٥٢٣، ٥٢٤، ٥٢٥، ٥٢٦، ٥٢٧، ٥٢٨، ٥٢٩، ٥٣٠، ٥٣١، ٥٣٢، ٥٣٣، ٥٣٤، ٥٣٥، ٥٣٦، ٥٣٧، ٥٣٨، ٥

*ما يذكره المؤلف عن التاريخ القديم لعلم الجبر ، وبخاصة ما يتعلق منه بالدور العربي يحتاج الى تصحيح ، وقد اشرنا الى ذلك في مقدمة الفصل الاول من هذا الكتاب ، وازيد على ذلك ما يلي :

١ - كان اول من وضع كتابا بين فيه الاصول الاولية لعلم الجبر هو ابو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي ، وهو رياضي فلكي مسلم عاش في القرن التاسع الميلادي ووضع كتابه المذكور حوالي سنة ٨٢٥ ميلادية وسماه كتاب الجبر والمقابلة . اما الجبر فيشمل جبر الكسور ، اي الضرب بالمضاعف المشترك البسيط للمقامات ثم نقل الحدود السالبة من احد طرفي المعادلة الى الطرف الآخر بحيث تصير الحدود كلها موجبة . واما المقابلة فتعني اختزال الحدود المتشابهة في طرفي المعادلة ، بحيث تصبح باسسط صيغة.

٢. صحيح ان الهنود كانوا لديهم معرفة عملية بحل بعض المعادلات التربيعية ، ولكن يبقى ان اول من قنن هذه المعرفة وجعلها علماً ذا اصول هو الخوارزمي.

في مقدمة الفصل ١ فقد حل نيقولا ترتاجليا (١٤٩٩ - ١٥٦٧) معادلة الدرجة الثالثة .
وقد وصف حله في رسالة الى ج. كاردان الذي نشر الحل (دون اذن من ترتاجليا). وفي
عام ١٥٤٥ أعطى فيراري (١٥٢٢-١٥٦٥) احد طلبة كاردان حلا لمعادلة الدرجة الرابعة . ولم
يكن معروفاً حتى مطلع القرن التاسع عشر هل للمعادلة الحدودية العامة من الدرجة $n \leq 5$
حل بصيغة جبرية ام لا . *

وبالطبع كان هناك حلول معروفة لانواع خاصة من المعادلات الحدودية (مثلا $S^3 =$
١) ولكن كان ابل (١٨٠٢-١٨٢٩) وجالوا (١٨١١-١٨٣٢) اول من اثبت عدم وجود صيغة
جبرية محضة يمكن ان تصلح لجميع المجموعات $f, g, h, \dots, n$ من العوامل النسبية في
المعادلة S^n . والخطوة الرئيسية نحو الاجابة على هذه المسألة وتطوير علم الجبر المجرد قام بها
لاجرانج (١٧٣٦-١٨١٣) في بحث نشر في حوالي عام ١٧٧٠ . وأشار الى وجود علاقة بين جذور
المعادلة الحدودية (معادلة S^n) والعوامل $f, g, h, \dots, n$. وبصورة خاصة اذا كانت $f, g, h, \dots, n$
جذوراً للمعادلة فان

$$S^n + nS^{n-1} + \dots + fS + g = (S - f)(S - g) \dots (S - n)$$

$$\text{حيث } nS^{n-1} + \dots + fS + g = 0$$

$$nS^{n-1} + \dots + fS + g = 0$$

$$f, g, h, \dots, n = 0$$

ان هذه العلاقات التي تعطي عوامل المعادلة بدلالة جذورها لا تتغير اذا تغير ترتيب
الجذور ولذلك تسمى بالاقترانات التماثلية .

ومن هذه العلاقات بين الجذور والمعاملات ابتكر لاجرانج طريقة لحل معادلات الدرجة
الثالثة والرابعة اولا بايجاد معادلة مرتبطة بها درجتها اقل من درجة المعادلة الاصلية . وعلى اي
حال فعندما طبقت هذه الطريقة على معادلة من الدرجة الخامسة حصل لاجرانج على معادلة
مرتبطة بها من الدرجة السادسة.

ومن هذا استنتج لاجرانج اخيراً ان الحل للمعادلة العامة من الدرجة الخامسة قد
يكون مستحيلاً باستخدام طرق جبرية صرفة.

واخيراً برهن ابل عام ١٨٢٤ ان المعادلة العامة التي درجتها اكبر من اربعة لا يمكن
حلها بالطرق الجبرية . ولكن هذا البحث احتوى على خطأ صححه فيما بعد ابل نفسه . (وقد
اعطى برهانين صحيحين). وهكذا بقي السؤال بدون حل وهو اي من صفوف المعادلات الحدودية
يمكن حلها بطرق جبرية.

وقد استغرق ذلك الشاب الفرنسي جالوا لتعيين تلك الصفوف من الحدوديات التي
يمكن حلها بالطرق الجبرية .

وقد اشتمل عمله على المفاهيم الاساسية للزمر الجزئية الطبيعية و «الحقل الموسع» . ولم تشع نتائجه حتى ١٨٧٠ بعد اربعين سنة تقريباً من قتله في مبارزة سياسية ، وعمره ٢١ سنة.

استخدم جالوا الزمر الجزئية الطبيعية ودليل الزمر الجزئية لتعيين صفوف المعادلات التي يمكن حلها . ومن الحقائق المثيرة ان عمل جالوا لم يعط طريقة لتقرير هل للمعادلات حل ام لا (بدلالة الجذور) فحسب بل برهن على استحالة بعض العمليات الهندسية مثل تثليث الزاوية وانشاء مربع له نفس مساحة دائرة معطاة (تربيع الدائرة) بمجرد استخدام فرجار ومسطرة غير مدرجة .

اول من اعطى تعريفاً للزمرة هو كوشي (١٧٨٩-١٨٥٧). وقد كانت مذكراته اول دراسة دقيقة لزمرة التعويضات التي نسميها في هذا الكتاب بزمرة التبديلات - ولقد نشرت هذه المذكرات في حوالي عام ١٨٤٠ . ولم يوضع تعريف للزمرة حتى ١٨٥٣ عندما وضع الانجليزي ارثر كالي (١٨٢١-١٨٩٥) تعريفاً للزمر المجردة ولم يعترف الرياضيون الآخرون فوراً بعمل كالي وذلك لان المصفوفات والرباعيات لم تكن منتشرة في ذلك الوقت. (انظر التمرين ٣,٧ - ١٠) واول من استعمل كلمة (مصفوفة) كان الرياضي الانجليزي ج. سلفستر (١٨١٤-١٨٩٧) وذلك عام ١٨٥٠ . واستعمل كلمة (مصفوفة) ليميز الترتيب المستطيل مثل

$$\begin{pmatrix} ١١^p & ٢١^p & \dots & ٣١^p \\ ١٢^p & ٢٢^p & \dots & ٣٢^p \\ ١٣^p & ٢٣^p & \dots & ٣٣^p \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$$

من المحدودة مثل :

$$٢ - ١ = ٣ - ٤ = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}$$

التي هي ببساطة عدد حقيقي . وبما ان المحددات كانت قد درست لسنوات عديدة قبل ١٨٥٠ فقد عرفت عدة خصائص للمصفوفات رغماً عن انها لم تذكر بهذه الصيغة وكان كالي اول من نشر بحثاً عن نظرية المصفوفات المختلفة عن مقابلتها من المحددات ومن ثم فغالباً ما ينسب له الفضل في ابتكار المصفوفات .

اما مفهوم التطابق في مضاعفات الاعداد الصحيحة فقد اظهر في عمل اويلر (١٧٠٧ - ١٧٨٣) ولاجرانج ولاجندر - (١٧٥٢ - ١٨٢٣) وجاوس (١٧٧٧ - ١٨٥٥) . وكان جاوس هو

الذي اقترح الرمز الذي نستعمله بصيغة مختصرة (ربما بتقليد كوشي) : $2 \equiv \text{ب (مض ن)}$. وظهر هذا الرمز في كتاب جاوس في الحساب المحقق وقد ظهر عام ١٨٠١. وظهر في هذا المؤلف برهان جاوس لنظرية فيرمات الصغرى بدلالة التطلقات وهي $2^{2^k-1} \equiv 1 \pmod{2^k}$ (مض ب) لكل $2 \leq k$ على ان لا يكون مضاعفات للعدد الاولي ب. (انظر المسألة ٦٤ في الفصل ٣ من اجل البرهان).

مراجعة

اشارات هامة

عملية على مجموعة جزئية	اقتران محافظ
زمرية جزئية	تشاكل
زمرة جزئية فعلا	نواة الاقتران
المجموعة المرافقة اليمنى لزمرة جزئية	اقتران محافظ قياسي
المجموعة المرافقة اليسرى لزمرة جزئية	صورة محافظة
زمرة جزئية طبيعية	
مخطط سهمي	صورة عكسية
مضاعفات عنصر	مركز زمرة
قوى عنصر	التبادل
رتبة عنصر	الزمرة الجزئية المتبادلة
رتبة زمرة	
دليل زمرة جزئية	
زمرة خارجة	
زمرة جزئية دورية متولدة عن عنصر	
زمرة دورية	

الرموز	
$a, n - p$	نو (ϕ)
$\langle p \rangle$	$\phi (s)$
o^p, s^o	s/s

مسائل :

- ١ - ما هو العنصر المحايد للزمر الجزئية ؟
- ٢ - ١. اذكر معيارا خاصا لاثبات ان مجموعة جزئية منتهية وغير خالية من اي زمرة s تكون زمرة جزئية هل هذا المعيار يصلح للمجموعة اللانهائية ؟

ب. اذكر معياراً خاصاً لاثبات ان مجموعة جزئية (منتهية او غير منتهية) لزمرة تكون زمرة جزئية.

٣ - لتكن S و E زمرتين جزئيتين من زمرة S .

هل تكون اي من المجموعتين $S \cap E$ أو $S \cup E$ زمرة جزئية من S ؟

اذا كانت S و E زمرتين جزئيتين طبيعيتين من S فهل تكون $S \cap E$ أو $S \cup E$ زمرة جزئية طبيعية من S ؟

٤ - لتكن S زمرة منتهية و $P \subseteq S$ ما العلاقة بين رتبة P ورتبة S ؟ ما العلاقة بين رتبة العنصر P ورتبة الزمرة الجزئية الدورية المتولدة عن P ؟

٥ - ما هي الزمر الجزئية من Z ؟

٦ - اذكر نظرية لاجرانج . هل من الضروري ان يكون عكس نظرية لاجرانج صحيحاً ؟

٧ - ما العلاقة بين دليل الزمرة الجزئية لزمرة منتهية ورتبة الزمرة ورتبة الزمرة الجزئية؟

ما العلاقة بين الدليل لزمرة جزئية طبيعية ورتبة زمرة الخارج S/S ؟

٨ - تحت اي شروط سواء على الزمرة الجزئية او على الزمرة يكون من الضروري للزمرة الجزئية ان تكون زمرة جزئية طبيعية ؟

٩ - اذا كانت S و S' زمرتين وكان $\emptyset \neq S \cap S'$ اقتراناً محافظاً فما هي صور العنصر المحايد في S ، ونظير عنصر P في S ؟

١٠ - يرافق كل اقتران محافظ ϕ من زمرة S الى زمرة S' مجموعتان : النواة ومجموعة الصورة . هل هاتان المجموعتان زمرتان جزئيتان من زمريهما ؟ هل هما زمرتين طبيعيتين ؟ تحت اي شروط على هذه المجموعات يكون الاقتران المحافظ تشاكلاً ؟

١١ - ما هي الطريقة التي يمكن بها اثبات ان زمرتين منتهيتين (صغيرتين) تكونان متشاكلتين؟

١٢ - اذكر نظرية كايلي.

١٣ - ما هي الزمر الدورية غير المتشاكلة ؟ كل زمرة دورية تتشاكل مع زمرة مألوفة . فاذا كانت رتبة الزمرة الدورية المعطاة n فمع اي زمرة تكون متشاكلة ؟ اذا كانت للزمرة المعطاة رتبة غير منتهية فمع اي زمرة تكون متشاكلة ؟

١٤ - اذا كان لزمرة رتبة اولية فمع اي زمرة تكون متشاكلة ؟ ما هي الزمر الجزئية لزمرة رتبته اولية ؟ ما هي رتبة اي عنصر لزمرة رتبته اولية ؟

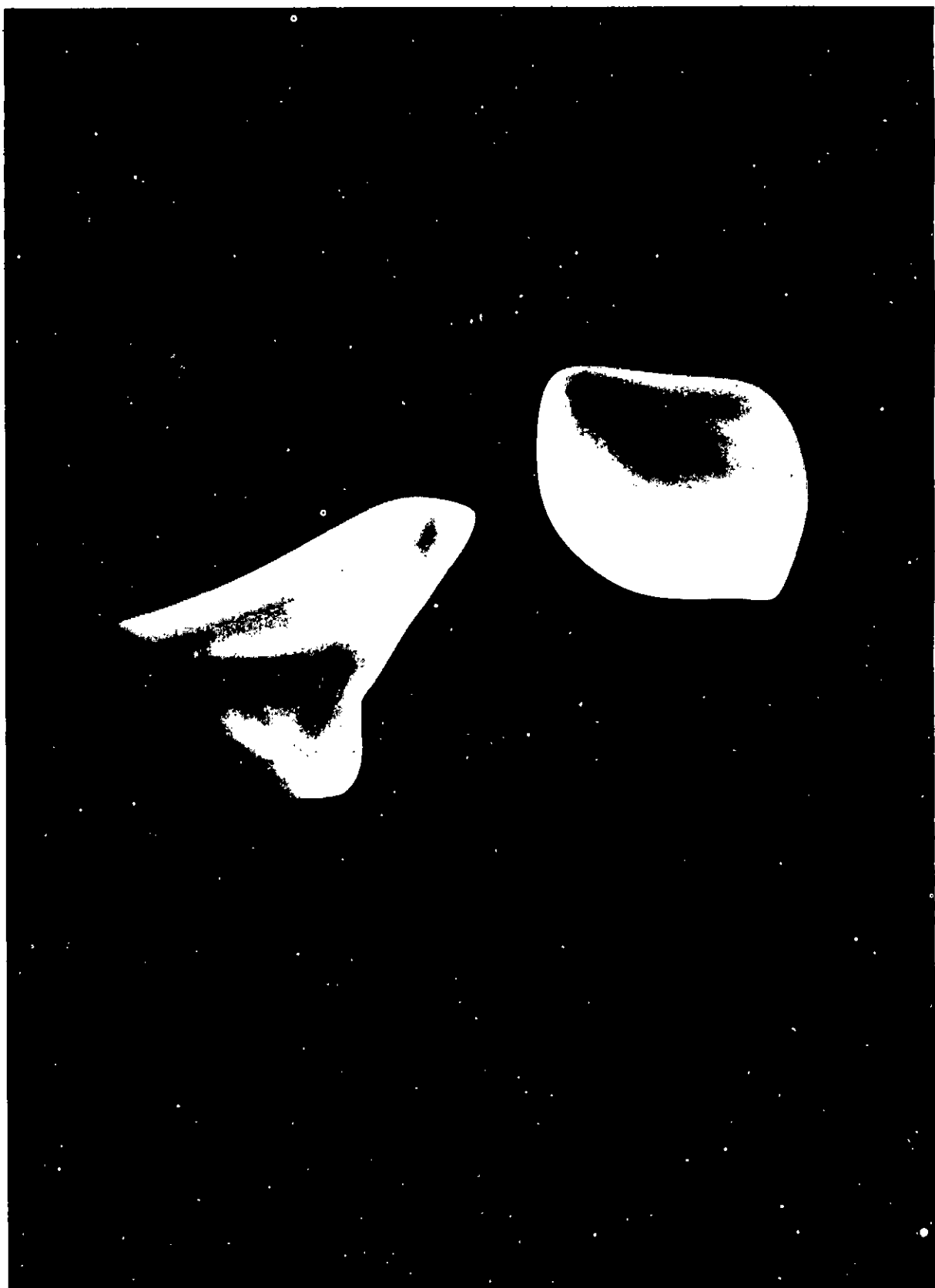
١٥ - اعط اربعة شروط على الاقل لكي تكون الزمرة الجزئية طبيعية .

١٦ - لأي من الزمر الجزئية S في S يمكن لعملية ثنائية ان تعرف تعريفاً حسناً على المجموعة المكونة من المجموعات المرافقة S/s ؟ كيف تكون هذه العملية معرفة ؟

١٧ - ما هو الاقتران المحافظ القياسي من S الى زمرة خارج S/S ؟

١٨ - اذكر نظرية التشاكل الاولى للزمر . وضح ماذا تعني .

١٩. كيف تستطيع «تعيين كل الزمر غير المتشاكلة التي تكون صوراً محافظة لزمرة S_n »؟
ان اجوبة المسائل التالية موجودة في التمارين :
٢٠. صف كل الزمر غير المتشاكلة ذات الرتب اثنين ، ثلاثة ، اربعة ، خمسة ، ستة على الترتيب .
٢١. لتكن S_n و S_m زميرتين وليكن $\phi : S_n \rightarrow S_m$ اقتراناً محافظاً . أي من خصائص S_m التالية ترثها S_n .
- (أ) اذا كانت نو $(\phi) \neq \{ \text{و} \}$ و ϕ ليس شاملا .
- (ب) اذا كانت نو $(\phi) \neq \{ \text{و} \}$ و ϕ شاملا .
- (ج) اذا كان ϕ تشاكلا .
٢. S_n زمرة تبديلية .
- ب. تحتوي S_n على زمرة جزئية فعلا ص .
- ج. تحتوي S_n على زمرة جزئية طبيعية فعلا ع .
٢٢. متى تكون $(Z, +)$ صورة محافظة للزمرة $(Z, +)$ ؟
٢٣. ما هي الزمر الجزئية لزمرة الجمع Z ؟



فصل ٣

الحلقات

الحلقات الكاملة الحقول

هناك مجموعات عديدة مألوفة مثل Z ، R ، و $M(R)$ لكل منها عمليتان ثنائيتان - الجمع والضرب - إلا أن المجموعة تكون زمرة بالنسبة لعملية الجمع فقط . أن هذه المجموعات Z ، Q ، R ، $M(R)$ مع عملية الضرب لها صفات مختلفة . فالمجموعتان $R - \{0\}$ ، $Q - \{0\}$ تكونان زمريتين بالنسبة للضرب ولكن $Z - \{0\}$ ليست زمرة مع أنها تتحقق فيها قوانين الاختزال بالنسبة لعملية الضرب . ومن جهة أخرى يمكن إيجاد مصفوفتين غير الصفر في $M(R)$ يكون حاصل ضربهما صفر ؛ فمثلاً ،

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

وزيادة على ذلك فلا يكون الضرب تبادلياً في $M(R)$ وتصلح المجموعات Z ، Q ، R و $M(R)$ نماذج لأنواع مختلفة من النظم الجبرية في هذا الفصل ، ولنبدأ بأخذ مجموعات لها عمليتان تجميعيتان ترتبطان بخاصية توزيعية . وكلما زدنا متطلبات الضرب نتقدم من الحلقات مثل $M(R)$ إلى الحلقات الكاملة مثل Z إلى الحقول مثل Q و R .

٣,١ الحلقات : تعريف وامثلة

لنبدأ فوراً بتعريف

تعريف :

الحلقة (ح، ،) هي مجموعة غير خالية ح عليها عمليتان ثنائيتان ، نرسم لهما عادة بالرمزين + (جمع) و . (ضرب) ، تحقق الفرضيات التالية :

أ. الجمع تجميعي : لكل أ ، ب ، ح ، $(ب + أ) + ح = ب + (أ + ح)$.

ب. الجمع تبديلي : لكل أ ، ب ، ح

$$أ + ب = ب + أ$$

ح يوجد في ح عنصر محايد للجمع : يوجد عنصر نرمز له بالرمز . في ح بحيث $أ + ٠ = أ$ لكل أ د

د. يوجد نظير للجمع : لكل أ ح يوجد عنصر نرمز له بالرمز - أ في ح بحيث أن $أ + (-أ) = ٠$

هـ يكون الضرب تجميعياً : لكل أ ، ب ، ح ، $(أ.ب).ح = أ.(ب.ح)$.

و. يكون الضرب توزيعياً من اليمين ومن اليسار بالنسبة للجمع :

لكل أ ، ب ، ح :

$$أ.(ب + ح) = (أ.ب) + (أ.ح)$$

$$(أ + ب).ح = أ.ح + ب.ح$$

ولنثبت ان نظاماً معيناً (ح، + ، .) يكون حلقة يجب ان نتأكد اولاً ان الجمع والضرب

يكونان عمليتين ثنائيتين على ح . ومن ثم يجب ان نبرهن ان ح تكون مغلقة بالنسبة

للجمع والضرب (اي لكل أ ، ب ، ح ، $أ + ب$ و $أ.ب$ ح). لاحظ ان الأوليات أ الى

د في التعريف أ تقول ان (ح، +) تكون زمرة ابدالية وبذا فيمكن ذكر تعريف الحلقة كما

يلي :

تعريف :

الحلقة (ح، + ، .) هي مجموعة ح عليها عمليتان ثنائيتان + و . بحيث

أ. تكون (ح، +) زمرة تبديلية.

ب. يكون الضرب تجميعياً.

ح. يكون الضرب توزيعياً من اليمين ومن اليسار بالنسبة للجمع .

وعندما نتعامل مع الاعداد الحقيقية غالباً ما نحذف اشارة الضرب ونرمز لضرب أ و ب

بوضع الاول بجانب الثاني منكتب أ ب لحاصل ضرب أ و ب . وبالمثل ، من المعتاد ان

يرمز لضرب عنصرين في الحلقة (ح، + ، .) بوضعهما متجاورين ولهذا فان أ.ب تصبح

أ. وفي تعبير مثل $أ + ب$ حد فيفترض ان يكون الضرب قد انجز اولاً (اي يكون $أ + ب$ حد $أ + ب = (أ.ب) + (ب.أ)$).

تعريف :

تكون الحلقة (ج ، + ، .) حلقة بعنصر محايد (او وحدة) اذا وفقط اذا امكن ايجاد عنصر يرمز له بالرمز ١ في ج بحيث ان $١.١ = ١.١ = ١$ لكل $أ$ في ج. ويسمى العنصر ١ بالعنصر المحايد للضرب.

وعندما درسنا الزمر افردنا تلك التي لها عملية تبديلية واعطيناها اسماً خاصاً . وبالمثل سنفرد الحلقات التي لها ضرب تبادلي . وكما سنرى فيما بعد كثيراً ما يكون لهذه الحلقات خصائص خاصة اخرى.

تعريف :

تكون الحلقة (ج ، + ، .) تبديلية اذا وفقط اذا كان الضرب عملية تبديلية على ج : $أ.ب = ب.أ$ لكل $أ ، ب$ في ج.

مسألة :

عين هل كل من النظم التالية حلقة ام لا ؟ حلقة بعنصر محايد ؟ حلقة تبديلية ؟ وحلقة تبديلية بعنصر محايد ؟ علل اجابتك . كن حراً باستخدام النتائج السابقة على الزمر . انظر الملحق ٢ عن خصائص الاعداد الحقيقية والبندين ١,١ و ١,٢ بشأن م (R).

$$١. (. , + , R)$$

$$ب. (. , + , Q)$$

$$ج. (. , + , Z)$$

$$د. (. , + , (R) م)$$

$$هـ. $\{ ٢ : ر : ر \in Z \}$ مع عمليتي الجمع والضرب العاديتين للاعداد.$$

$$و. $\{ س : س غير نسبية \} = Q - R$ مع عمليتي الجمع والضرب العاديتين للاعداد.$$

خلال دراستنا للزمر درسنا زمرة الجمع Z المكونة من صفوف تكافؤ من مضاعفات n . ونرغب ان نعرف الآن عملية ضرب على Z ونبرهن ان النظام $(Z , + , .)$ يكون حلقة . ويساعدنا في هذا الواجب النتيجة التالية بالنسبة لضرب صفوف تكافؤ من مضاعفات n : اذا كانت $أ ، ب ، ج ، د$ بحيث ان $أ \equiv ح$ (مض n) و $ب \equiv د$ (مض n) فان $أ.ب \equiv ح.د$ (مض n).

مسألة :

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً ثابتاً . عرف حاصل الضرب $أ.ن$. بن للعنصرين $أ$ و $ب$ بوضع $أ.ن$ $أ.ن = (أ.ب)ن$

أ. اعط عدة امثلة على هذا التعريف .

ب. برهن ان التناظر

$$(a, b) \rightarrow (b, a)$$

يكون عملية ثنائية معرفة تعريفاً حسناً على Z . (لعمل ذلك اثبت انه اذا كانت

$$a = c \text{ و } b = d \text{ فان } a + b = c + d \text{ أو } a - b = c - d \text{ أو } ab = cd$$

$$\text{ما يكافئه } (a, b) = (c, d) \text{ (حيث } a, b, c, d \in Z \text{)}$$

تسمى هذه العملية بالضرب على Z .

ح. اعمل جداول الضرب على Z و $4Z$.

د. اثبت ان $(Z, +, \cdot)$ تكون حلقة.

تمارين :

١. عين اي من المجموعات التالية بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب العاديتين للاعداد تكون

حلقة بعنصر محايد . علل اجاباتك.

$$A. \{a^3 : a \in Z\}$$

$$B. \left\{ \frac{1}{5^k} : k \in Z, k \neq 0 \right\}$$

$$C. \left\{ a + b\sqrt{2} : a, b \in Q \right\} \text{ حيث } d \text{ عدد أولي وهكذا يكون } \sqrt{d} \text{ عدداً غير نسبي}$$

٢. اعمل جدول ضرب على Z_7 .

٣. لتكن S مجموعة غير خالية . ولتكن $\cdot$ المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية من

S . عرف عمليتين ثنائيتين $\oplus$ و $\odot$ على S كما يلي :

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) \text{ و } A \odot B = A \cap B \text{ لكل } A, B \subseteq S$$

اثبت $(S, \oplus, \odot)$ تكون حلقة تبديلية بعنصر محايد . ●

$$4. \text{ هل المجموعة } \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in R \right\}$$

بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب العاديتين للمصفوفات تكون حلقة ؟ حلقة تبديلية ؟ حلقة

بعنصر محايد ؟

٥. لتكن $(S, +)$ زمرة تبديلية . اثبت انه يوجد ضرب على S بحيث ان النظام $(S, +, \cdot)$

يكون حلقة تبديلية لهذا فاي زمرة تبديلية يمكن عملها حلقة تبديلية.

٦. لتكن $(S, +, \cdot)$ حلقة و S مجموعة غير خالية ولتكن ϕ $(S, \cdot)$ المجموعة المكونة

من كل الاقتترانات من S الى S . فنعرف الجمع $\oplus$ و $\odot$ للاقتترانيين ϕ, ψ $(S, \cdot)$

بوضع

(ق + د) (س) = ق (س) + د (س) لكل س و س (الجمع النقطي)
ونعرف الضرب ق هـ للاقترايين ق هـ و د ق (س هـ ، ج) بوضع
(ق هـ) (س) = ق (س) . هـ (س) لكل س و س (الضرب النقطي). لقد لاحظنا ان (ق
(س هـ ، ج) ، +) تكون زمرة (التمرين ١٠ - ١٠).
٢. اعط امثلة عدة على عناصر ق (Z ، Z).
ب. لتكن س الفترة [١٠]. في ق (س هـ ، R) ولتكن ق (س) = س^٢
و هـ (س) = س^٢ + ١ لكل س و س . جد ق + هـ ، ق هـ
حـ في ق (Z ، Z) لتكن ق (١) = ٣ و لتكن هـ (١) = ٢ لكل ١ ∈ Z . جد
(ق + هـ) (١) و (ق هـ) (١) لكل ١ ∈ Z
د. لتكن (ج ، + ، .) حلقة و س مجموعة غير خالية .
اثبت ان (ق (س هـ ، ج) ، + ، .) تكون حلقة.
هـ اثبت ان الضرب يكون تبديلياً في ق (س هـ ، ج) اذا فقط اذا كانت ج حلقة تبديلية.
و. اثبت ان ق (س هـ ، ج) لها اقتران محايد ضربي اذا فقط اذا كانت ج لها عنصر
محايد ضربي .

٧ . نقول ان الاقتران ق: R ← R خطي اذا امكن ايجاد ٢ ، ب ، ح ، د ∈ R بحيث ان ق (س ، ص) = (٢س + ب ص ، حس + د ص).
لكل (س ، ص) ∈ R . لتكن ل (R) المجموعة المكونة من كل الاقترانات الخطية
ق: R ← R . نعرف الجمع
ق + هـ للاقترايين ق ، هـ ∈ ل (R) بوضع
(ق + هـ) (س ، ص) = ق (س ، ص) + هـ (س ، ص).
لاحظ ان ل (R) تكون مجموعة جزئية من ق (R ، R) وان عملية الجمع هي نفسها لكلا
المجموعتين.
٢. برهن ان (ل (R) ، +) تكون زمرة تبديلية .
ب. برهن ان ل (R) تكون مغلقة بالنسبة لتركيب الاقترانات فاذا كانت ق ، هـ ∈ ل
(R) فان ق هـ ∈ ل (R) وبذا فان التركيب يكون عملية ثنائية تجميعية على ل
(R).
ج. برهن ان التركيب يكون توزيعياً بالنسبة للجمع على ل (R).
د. برهن ان ل (R) تكون حلقة بعنصر وحدة.

٨. لتكن (س هـ ، +) زمرة تبديلية . ولتكن محا (س هـ) المجموعة المكونة من كل الاقترانات
المحافظة من س هـ الى س هـ . ولهذا فان ∅ س هـ ← س هـ تكون في محا (س هـ) اذا فقط اذا كان

$\phi = (\phi + \phi) \phi = (\phi + \phi) \phi$ لكل ϕ ، ب و س . عرف الجمع $\phi + \phi$ لاقترايين ϕ ، ϕ مح (س) بوضع

$$(\phi + \phi) \phi = (\phi + \phi) \phi \text{ لكل } \phi \in S.$$

أ. اعط امثلة عديدة لعناصر مح (Z).

ب. في مح (Z) جد $\phi + \phi$ اذا كانت $\phi = 2$ و $\phi = 1$ لكل $\phi \in Z$.

ج. اثبت انه اذا كانت ϕ ، ϕ و مح (س) فتكون $\phi + \phi$ مح (س).

د. اثبت ان مح (س) ، $+$ تكون زمرة تبديلية .

٩*- لتكن مح (س) ، $+$ زمرة تبديلية . لكل زوج من الاقترانات المحافظة ϕ ، ϕ و مح (س)

يعرف التركيب كالمعتاد بوضع $(\phi \circ \phi) \phi = (\phi \circ \phi) \phi$ لكل $\phi \in S$.

أ. في مح (Z) جد $\phi \circ \phi$ للاقترايين المحافظين المعرفين بالصيغة

$$\phi = (\phi) \text{ و } \phi = (\phi) \text{ لكل } \phi \in Z.$$

ب. في مح (Z) جد $\phi \circ \phi$ للاقترايين المحافظين ϕ و ϕ المعرفين بالصيغتين $\phi = (\phi) \text{ و } \phi = (\phi)$

$$\text{و } \phi = (\phi) \text{ لكل } \phi \in Z.$$

ج. لتكن مح (س) ، $+$ زمرة تبديلية و ϕ ، ϕ و مح (س).

اثبت ان $\phi \circ \phi$ و مح (س).

د. برهن ان مح (س) ، $+$ تكون حلقة اذا كانت س زمرة تبديلية.

هـ. لتكن ϕ ، ϕ ، ϕ ، ϕ ، ϕ عرف $\phi : \phi \rightarrow \phi$ بوضع

$$\phi = (\phi) = (\phi) \text{ (س ، ص) = (س ، ص) + (ص ، ص) لكل (س ، ص) } \phi \in R.$$

بين ان ϕ اقتران محافظ من ϕ الى نفسها.

(تذكر ان الجمع يكون معرّفاً على ϕ بالصيغة $\phi = (\phi) + (\phi) =$

$$(\phi + \phi) \phi = (\phi + \phi) \phi$$

جد اقترانين محافظين ϕ ، ϕ و مح (R) بحيث ان $\phi \circ \phi = \phi \circ \phi$.

يبين هذا ان مح (س) ليس من الضروري ان تكون تبديلية بالنسبة لعملية التركيب.

٣,٢ الخصائص الأولية للحلقة

تؤكد لنا الأوليات ٢ الى د في التعريف ١ انه لأي حلقة ج تكون ج ، $+$ زمرة تبديلية

. وهذا يعطينا فوراً الخصائص التالية للحلقة ج ، $+$ ، $+$ ، $+$.

فرضية :

- أ. إذا كانت $1, b, c$ ، $c \div b$ و $a + b = c + d$ فإن $b = d$ (الاختزال في الجمع)
- ب. إذا كانت $c \div b$ و $a + b = c$ لبعض $a \div b$ فإن $c = 0$ (وحدانية العنصر المحايد الجمعي).
- ج. إذا كانت $1, b, c$ ، $b \div c$ و $a + b = c$ فإن $0 = b = a$ (وحدانية النظير الجمعي).
- د. لكل $1, a, b \div c$ يوجد s وحيد في c بحيث ان $a + s = b$. وفي الواقع $s = b - a$ (وغالباً ما نرمز لـ s بالصيغة $b - a$. (تعرف هذه عملية الطرح في الحلقة).
- هـ. لكل $a \div b$ فإن $-(a - b) = 1$.
- يوجد خصائص أخرى للحلقة تنتج عن وجود الضرب ومن خاصية التوزيع. برهن هذه الخصائص في المسألة التالية .

مسألة :

- أ. لكل $a \div b, c, 1$ ، $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- ب. لكل $1, a, b \div c$ ، $a \cdot (b - c) = (a \cdot b) - (a \cdot c)$ و $(b - a) \cdot c = (b \cdot c) - (a \cdot c)$.
- ج. لكل $1, a, b \div c$ ، $(a - b) \cdot c = (a \cdot c) - (b \cdot c)$.
- د. إذا كانت $(c, +, \cdot)$ حلقة لها عنصر محايد 1 وامكن ايجاد عنصر $s \div c$ بحيث ان $s \cdot 1 = 1 = s \cdot a$ لكل $a \div c$ ، فإن $s = 1$ (وحدانية العنصر المحايد الضربي اذا وجد).
- هـ. إذا كانت $(c, +, \cdot)$ حلقة لها عنصر محايد 1 واذا امكن ايجاد $1, a$ ، a^{-1} و b في c بحيث ان $a^{-1} \cdot a = 1 = a \cdot a^{-1}$ ، $1 = b \cdot a$ ، $a \cdot b = 1$ فإن $a^{-1} = b$ (وحدانية النظير الضربي اذا وجد).
- و. لكل $1, a, b, c \div d$ ، $a \cdot (b - c) = (a \cdot b) - (a \cdot c)$ و $(b - a) \cdot c = (b \cdot c) - (a \cdot c)$.

تمارين :

- ١ - برهن انه اذا كانت c حلقة بعنصر محايد 1 و $c \neq \{0\}$ فإن $1 \neq 0$.

في التمارين التالية لتكن $(c, +, \cdot)$ حلقة . في التمارين ٢ - ٨ اكمل وصحح العبارة اذا لزم . ثم برهن النتيجة.

$$2. \quad \text{---} - (b + a) \text{---}$$

$$\text{---} - (b - a) \text{---}$$

$$3. \quad (b - a) - c = c - (b - a) \text{---}$$

$$c - (b - a) = (c - b) + a$$

$$4. \quad (a + b) + c = [(a + b) + c] + a$$

$$\text{---} + [(a + b) + c] =$$

$$5. \quad (a + b) + c = (a + b) + c$$

$$(a - b) - c = (a - b) - c$$

$$6. \quad (a + b) - c = (a + b) - c$$

$$(a - b) + c = (a - b) + c$$

$$7. \quad (0) = (0) -$$

$$(1) - a = a \text{ اذا كانت } a \text{ لها عنصر محايد ضربي } 1.$$

$$8. \quad a - b = c \text{ اذا فقط اذا كان } a = c + b$$

9. ان التعبير عن وحدانية العنصر المحايد الجمعي هي انه كانت $a + b = a$ لبعض $a \in H$

فان $a = 0$ ومن جهة اخرى فان التعبير عن وحدانية العنصر المحايد الضربي هي انه

اذا كانت $a \cdot b = a$ لكل $a \in H$ فان $b = 1$.

اثبت ان العبارة الاخيرة لا يمكن تغييرها لتقرأ «اذا كانت $a \cdot b = a$ لبعض $a \in H$ فان $b = 1$ ».

اعمل هذا بايجاد عنصر $e \in M(R)$ مغاير للمصفوفة المحايدة ومصفوفة

مغايرة للصفر $e \in M(R)$ بحيث ان $e \cdot e = e = e \cdot e$.

10. اثبت بالتناقض انه اذا كان a و b عنصرين في H مغايرين للصفر و $a \cdot b = 0$ فلا يمكن ان

يكون a نظير ضربي.

11. في الحلقة H يسمى اي عنصر a بحيث ان $a^2 = a$ بالعنصر الجامد. وقد يكون مستغرباً

ايجاد حلقة بعنصر محايد H يمكن ان يكون فيها عنصر جامد a بحيث $a \neq 0$ و $a \neq 1$.

أ. جد كل العناصر الجامدة في $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}_m$.

ب. برهن انه اذا كانت r عدداً فردياً يكون العنصر (r) عنصراً جامداً في $\mathbb{Z}_m$.

ج. جد عدة عناصر جامدة في $M(R)$.

د. عين كل قيم s بحيث تكون

$$\begin{pmatrix} s & s \\ s & s \end{pmatrix}$$

عنصراً جامداً في $M(R)$.
هـ جد علاقة بين S ، V بحيث تكون المصفوفة

$$\begin{pmatrix} S & - & S \\ V & - & V \end{pmatrix}$$

عنصراً جامداً في $M(R)$.

٣,٢ الحلقات الجزئية والمثاليات

في دراستنا للزمر رأينا انه اذا كانت V مجموعة جزئية في زمرة معروفة S فما علينا الا ان نفحص شرطاً خاصاً ($0 \neq 1$) V لكل a ، $b \in V$) لمعرفة هل ان V نفسها زمرة بالنسبة للعملية التي على S . وباتباع هذا الاسلوب سننظر في «الحلقات الجزئية» ونفتش عن اقل شروط تفرض على المجموعة الجزئية لتصبح حلقة جزئية من الحلقة الاصلية.

تعريف :

لتكن $(H, +, \cdot)$ حلقة . فتكون المجموعة الجزئية V في H حلقة جزئية من H اذا وفقط اذا كانت $(V, +, \cdot)$ حلقة (اي تكون V حلقة بالنسبة للعمليات الناتجتين من H). ولتعيين هل ان مجموعة جزئية معطاة V من الحلقة H حلقة جزئية فعلا فوجب ان نقرر فيما اذا كانت V زمرة جزئية من H بالنسبة للجمع ام لا.

تذكر ان V تكون زمرة جزئية من زمرة الجمع H اذا وفقط اذا كانت V مغلقة بالنسبة للطرح : $2 + (-b) = 2 - b$ لكل $a, b \in V$ (انظر النظرية ١٢ في الفصل ٢). ما هي الخصائص الاخرى التي يجب التحقق منها لاثبات ان V تكون حلقة ؟

مسألة :

فيما يلي عين هل المجموعات الجزئية V من الحلقة H تكون حلقة جزئية ام لا . اذا كانت V حلقة جزئية فهل تكون حلقة تبديلية ؟ حلقة بعنصر محايد ؟ علل اجابتك.

$$1. \quad H = M_n(R) \\ V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in R \right\} \\ Z = H$$

$V = Z = \{ n : n \in R \}$ حيث $n \in Z$ ثابت.

لاي حلقة $H \neq \{0\}$ حلقتان جزئيتان على الاقل هما $\{0\}$ و H . (لماذا ؟).

تعريف :

مسألة :

مسألة :

نظرية :

حقق هذه النتيجة مع مدرسك.

مضاعفات العنصر (او قواه) فمثلا في Q فان المجموعة :

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \left(\frac{1}{r} \right) \cdot (r) \right\} = \langle \frac{1}{r} \rangle$$

لا تكون حلقة حزئة لان $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ ليس عنصراً في المجموعة .

مسألة :

٢. استعمل النظرية ١٣ لتبرهن انه اذا كانت $(ج, +, \cdot)$ حلقة وكان $٢ \in ج$ ثابتاً فالمجموعات

$$\{ \text{اس : س } \cup \text{ ح } \} = \text{ح}^p$$

$$\{s : s \in S\} = S$$

تكون حلقات جزئية من $\mathcal{H}$.

ب. جد كل الحلقات الجزئية :

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1}, Z_n$$

لاحظ انه يمكننا استخدام المسألة ١٤^٢ لنبرهن ان كل المجموعات

$$Z_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\} \quad (n \in \mathbb{Z}^+) \text{ تكون حلقات جزئية من } \mathbb{C}.$$

مسألة :

اثبت ان المجموعة Z حيث n عدد صحيح موجب ثابت ، لها الخاصية التالية لكل $r \in Z$ ،
 $l \in Z$ فان rl (أول r) عنصر في Z .
 كثير من الحلقات الجزئية لاي حلقة معطاة قد يكون لها خاصية الانغلاق المذكورة في المسألة
 ١٥ . ولهذه الحلقات الجزئية اسم يعطيه التعريف التالي :

تعريف :

لتكن $(\cdot, +, \cdot)$ حلقة . تسمى الحلقة الجزئية S من R مثالية اليمنى في R اذا وفقط اذا
 كان لكل $s \in S$ و $r \in R$ يكون $rs \in S$. او بعبارة اخرى تكون الحلقة الجزئية S من R
 مثالية اليمنى في R اذا وفقط اذا كان لكل $r \in R$ ، $s \in S$ $rs \in S$.
 وتسمى الحلقة الجزئية S من R مثالية يسرى في R اذا وفقط اذا كان $rs \in S$ و $r \in R$ فان
 $s \in S$. او بعبارة اخرى تكون الحلقة الجزئية S من R مثالية يسرى اذا وفقط اذا كان لكل
 $r \in R$ ، $s \in S$ $rs \in S$.
 تدعى الحلقة الجزئية من R مثالية (او مثالية من الجانبين) اذا وفقط اذا كانت مثالية من
 اليمين ومثالية من اليسار معاً . اي ان الحلقة S من R تكون مثالية في R اذا وفقط اذا كان
 لكل $r \in R$ ، $s \in S$ $rs \in S$ و $sr \in S$.

عندما تبرهن ان مجموعة خاصة تكون مثالية فلا تنس ان تبرهن انها تكون حلقة جزئية .

مسألة :

هل المجموعة $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in R \right\}$ مثالية اليمنى في $M_2(R)$ ؟
 مثالية يمنى في $M_2(R)$ ؟ مثالية يسرى في $M_2(R)$ ؟ مثالية من الجانبين ؟
 علل اجاباتك .

لقد عرفنا في المسألة ١٤ مجموعتين جزئيتين S و T في الحلقة R واثبتنا ان هاتين
 المجموعتين تكونان حلقتين جزئيتين . والآن يمكننا ان نقول المزيد عن هذه الحلقات الجزئية .

مسألة :

اثبت انه اذا كانت $(\cdot, +, \cdot)$ حلقة وكان I ح ثابتاً فتكون الحلقة
 $S = \{ r \in R : rI = 0 \}$ مثالية يمنى .

لقد لاحظنا ان مفهوم الزمر نشأ عن رغبة لايجاد حل للمعادلات الحدودية . وبالمثل فمفهوم
 المثاليات ترجع جذوره الى محاولة لحل مسألة مشهورة لا تزال غير محلولة حتى يومنا هذا .
 ان اشهر المسائل غير المحلولة في الرياضيات مسألة ايجاد حل لنظرية فيرمات الاخيرة التي تقول
 انه اذا كان $n > 2$ عدداً صحيحاً فلا توجد اعداد صحيحة s, r, t ، s, r, t كلها غير الصفر

تحقق $s_n + s_n = s_{n+1}$.

ولقد أدت المحاولات لبرهنة نظرية فيرمات الأخيرة بشكل عام (وعلى الأخص لكل الأعداد الأولية $b < 2$) إلى ابتكار المثاليات في نظرية الحلقات ضمن مفاهيم أخرى.

في عام ١٨٤٣ اعتقد كومير (١٨١٠ - ١٨٩٣)، وهو رياضي ألماني بدأ كطالب في علم اللاهوت، أنه قد حل نظرية فيرمات الأخيرة. قال كومير، ليكن b عدداً أولياً ولنأخذ العدد α الذي يكون حلاً للمعادلة الحدودية $1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{b-1} = 0$.

وبذا تكون α الجذر البائي للوحدة لان $\alpha^b = 1$.

$$0 = (1 - \alpha)(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{b-1})$$

انشأ كومير المجموعة المكونة من الأعداد التي تأخذ الصيغة

$$a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_{b-1}\alpha^{b-1} \text{ حيث } a_0, a_1, a_2, \dots, a_{b-1} \text{ أعداد صحيحة.}$$

وعرف لهذه المجموعة مفاهيم مثل «أعداد صحيحة»، «أعداد أولية»، «القسمة». وافترض بعد ذلك نظرية تحليل وحيد تشبه النظرية الأساسية في الحساب (انظر النظرية ١٤ في الملحق ٦).

وعند هذه النقطة كان برهانه خطأ لأن التحليل الوحيد يتحقق فقط لأعداد أولية معينة. ولكنه املا باستعادة التحليل الوحيد ابتكر مفهوم الأعداد المثالية وبذا برهن أن نظرية فيرمان الأخيرة تصح لأعداد أولية عديدة ن.

وعلى أية حال لم تكن الأعداد المثالية معرفة تعريفاً حسناً وقد وسع ديركند (١٨٣١-١٩١٦) مفهوم الأعداد المثالية واستخدم المثاليات لمعالجة مسألة التحليل الوحيد لما يسمى بالأعداد الجبرية (الأعداد التي تكون حلولاً للمعادلات الحدودية التي معاملاتها أعداداً صحيحة). فمثلاً وسع مفهوم الأعداد الأولية بإدخال فكرة المثالي الأولى (وهو مثالي $\mathfrak{p}$ بحيث إذا كانت $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}$ فإن $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}$ أو $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{b}$). وهذه ستدرسها في الفصل ٥. ولم يكتب ديركند بذكر أوليات لتعريف المثاليات بل ذكر أيضاً أوليات للحلقات والحقول (انظر البند ٣،٧). ولقد ظهرت هذه التعاريف ونتائج عديدة لديركند عام ١٨٧١ في ملحق لمجلة في نظرية الأعداد (Zahlentheorie Dirichlet's حرره ديركند نفسه، إذ كان لمدة خمسين عاماً يدرس في مدرسة المانية ثانوية تقنية).

تمارين :

- ١ - عين أي من المجموعات $\mathfrak{p}$ التالية حلقة جزئية من $M(R)$.
وإذا كانت $\mathfrak{p}$ حلقة جزئية، هل تكون تبديلية؟ حلقة بعنصر محايد؟
علل اجابتك.

$$2. \mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(R) \mid a, b, c, d \in \mathfrak{p} \right\}$$

(المجموعة المكونة من كل المصفوفات القطرية)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : 1, 2, \dots, n \right\} = \text{ص}$$

(المجموعة المكونة من المصفوفات الثلاثية العليا)

٢- لتكن ص مجموعة جزئية من الحلقة ج. اثبت ان ص تكون مثالية يمنى في ج اذا كانت ص زمرة جزئية من ج بالنسبة للجمع ، ولكل ص و ر ج ر ص و ر ج ر ص و يمكن استخدام هذه النتيجة لتبسيط البرهان على ان مجموعة جزئية معينة من الحلقة تكون فعلا مثالية يمنى . وهناك نتيجة مشابهة تصح على المثاليات اليسرى.

٣ - لتكن ج حلقة بعنصر محايد.

١. برهن انه اذا كانت ص مثالية فعلا في ج فان $V \not\subseteq 1$ ص (برهن بالتناقض).

ب. برهن انه اذا كانت ص مثالية فعلا و $V \not\subseteq 1$ لها نظير ضربي في ج فان $V \not\subseteq 1$ ص. (برهن بالتناقض).

٤ - جد كل المثاليات للمجموعات التالية . علل اجاباتك

$$\begin{matrix} 1. & Z & \supset & Q \\ & R & & Z \end{matrix}$$

٥ - ليكن ن عدداً صحيحاً موجباً ثابتاً . عين كل الحلقات الجزئية وكل المثاليات للحلقة Z_n .

$$6- \text{ لتكن } Q = [2\sqrt{2}] = \{ 1 + 2\sqrt{2} : 1, 2, \dots, n \} .$$

برهن ان Q تكون حلقة جزئية من R .

برهن او انف ان Q تكون مثالية في ج .

(انظر التمرين ٢,٢ - ٥ و ٢,٢ - ٦).

$$7 - \text{ جد عنصراً } e \in (R) \text{ حيث ان } e \in (M(R)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : 1, 2, \dots, n \right\}$$

وهذا يبرهن ان هذه المجموعة تكون حلقة جزئية من $M(R)$ ومثالية يسرى . اثبت ان $e \in (M(R))$ لا تكون مثالية يمنى

٨ - ١. لتكن

$$e = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

جد الحلقة الجزئية $e \in (M(R))$ من $M(R)$. اثبت انه لكل

س د ع (م) (R) . فان ع س = س .
وبدا تكون ع عنصراً محايداً أيمن للحلقة الجزئية . هل يكون ع عنصراً محايداً لهذه
الحلقة ؟ علل اجابتك .

ب. ليكن e عنصر جمود في زمرة G (اي العنصر الذي يحقق $e^2 = e$) . برهن ان e يكون
عنصراً وحده أيمن للحلقة الجزئية eG .

٩* اثبت ان $m(R)$ ليس لها مثاليات فعلا من الجانبين . لعمل ذلك افترض ان $e \equiv m$
(R) تكون مثالية و $e \neq \{0\}$. فيجب ان نبرهن على ان $e = m(R)$.
ابداً باعتبار حواصل الضرب $s \cdot s$ ، $s \cdot s$ حيث $s \in S$ ، s تكون احدى المصفوفات

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

١٠- ا. برهن انه اذا كانت e و e حلقتين جزئيتين من حلقة G فتكون $e \cap e$
حلقة من G .

ب. برهن انه اذا كانت e و e كلتاهما مثاليتين يمينين في G فتكون $e \cap e$
مثالية يمنى في G . ومن الطبيعي ان تصبح عرضيات مشابهة للمثاليات اليسرى ومن
الجانبين .

١١- ا. برهن انه اذا كانت e ، e مثاليتين في حلقة G و $e + e = \{e + e : e \in e\}$
و $e \cap e$ و $e \cap e$ فان $e + e$ تكون مثالية في G تحتوي على كل من e و
 e .

ب. جد $e + e$ صراحة عندما تكون $G = Z$ ، $e = Z$ و $e = Z$.
١٢ لتكن $(G, +, \cdot)$ حلقة تبديلية و S مجموعة غير خالية لاحظنا في التمرين ٣,١ - ٦ أن
المجموعة $Q(S, G)$ المكونة من كل الاقترانات $q: S \rightarrow G$ تكون حلقة بالنسبة لعمليتي
الجمع والضرب المعرفتين ل Q ، د $Q(S, G)$ كالتالي :
 $(q + d)(s) = q(s) + d(s)$
 $(q \cdot d)(s) = q(s) \cdot d(s)$

لكل $s \in S$. اي من المجموعات الجزئية من $Q(S, G)$ التالية تكون حلقات جزئية ؟ اي
تكون مثاليات في $Q(S, G)$ ؟ علل اجابتك .
١. $\{q: q \in Q(S, G) \text{ و } q(s) = 0 \text{ حيث } s \text{ ثابت} \}$.

ب. $\{ \text{قر} : \text{قر} \rightarrow \text{قر} (\text{س} , \text{ج}) \text{ و } \text{قر} (\text{س}) = 1 \}$ حيث $\text{س} \rightarrow \text{س} \text{ و } \text{س} \rightarrow 1$ تكون ثابتين.
 ح. $\{ \text{أقر} : \text{ق} \rightarrow \text{ق} (\text{س} , \text{ح}) \text{ و } \text{ق} (\text{س} , \text{ج}) \}$ حيث $\text{أقر} \rightarrow \text{ق} \rightarrow \text{ق}$ ثابتة و أقر اقتران معرف بوضع $(\text{أقر}) (\text{س})$

$$1^2 = (\text{قر} (\text{س})) \text{ لكل } \text{س} \rightarrow \text{س}.$$

١٣. لتكن $(\text{س} , +)$ زمرة تبديلية . فتكون المجموعة $\text{محا} (\text{س})$ المكونة من كل زمر الاقترانات المحافظة من س الى نفسها حلقة بالنسبة لمجموع وتركيب اي اقترانين محافظين ϕ , ψ $\exists$ $\text{محا} (\text{س})$ معرفتين بالصيغة.

$$(\phi + \psi) (\text{س}) = (\text{س}) \phi + (\text{س}) \psi \text{ و}$$

$$(\phi \circ \psi) (\text{س}) = (\text{س}) \phi \circ (\text{س}) \psi$$

لكل $\text{س} \rightarrow \text{س}$. (انظر التمرينين ١ - ٣ ، ١ - ٨ و ١ - ٩).

اي من المجموعات التالية تكون حلقات جزئية من $\text{محا} (\text{س})$ ؟

وايها تكون مثاليات يسري ؟ علل اجاباتك .

١. $\{ \phi : \phi \rightarrow \text{محا} (\text{س}) \text{ و } \phi \text{ اقتران شامل من } \text{س} \text{ الى } \text{س} \}$.

ب. $\{ \phi : \phi \rightarrow \text{محا} (\text{س}) \text{ و } \phi \text{ تشاكل} \}$

ح. $\{ \phi : \phi \rightarrow \text{محا} (\text{س}) \text{ و } \phi (\text{س}) = 0 \}$ حيث $\text{س} \rightarrow \text{س} \rightarrow \text{س} - \{ 0 \}$ ثابتة

د. $\{ \phi : \phi \rightarrow \text{محا} (\text{س}) \text{ و } \phi \circ \phi = 0 \}$ حيث $\phi \circ \phi = 0$ $\exists$ $\text{محا} (\text{س})$ ثابتة.

٣,٤ الاقترانات المحافظة

لتكن $\mathcal{H}$ و $\mathcal{H}'$ حلقتين فانهما تكونان زميرتي جمع . ومن ثم فيمكننا اعتبار اقتران محافظ (بين زميرتين) أو تشاكل ϕ من $(\mathcal{H}, +)$ الى $(\mathcal{H}', +)$. وقد يحافظ هذا الاقتران على العملية الثانية للضرب في الحلقتين وقد لا يحافظ . وفي هذا البند نفحص اقترانات من $\mathcal{H}$ الى $\mathcal{H}'$ تدعى الاقترانات المحافظة الحلقية التي تحافظ على كل من الجمع والضرب.

تعريف :

لتكن $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ و $(\mathcal{H}', +, \cdot)$ حلقتين . يكون الاقتران $\phi: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ اقتراناً محافظاً (بين حلقتين) اذا وفقط اذا كان لكل $a \in \mathcal{H}$ ، $b \in \mathcal{H}'$ ،
 $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$ و $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$
 ويكون اي اقتران $\phi: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ تشاكلاً (بين حلقتين) من $\mathcal{H}$ الى $\mathcal{H}'$ اذا وفقط اذا كان ϕ اقتراناً محافظاً (بين حلقتين) وكان ϕ واحداً لواحد وتشاكلاً . ونقول ان حلقتين $\mathcal{H}$ و $\mathcal{H}'$ متشاكلتان اذا وفقط اذا امكن ايجاد تشاكل من $\mathcal{H}$ الى $\mathcal{H}'$.

مسألة :

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً ثابتاً . عرف اقتراناً ϕ من الحلقة Z الى الحلقة Z_n بوضع $\phi(a) = a \pmod{n}$. برهن ان ϕ اقتران محافظ حلقى . لقد استعملت كلمة (اقتران محافظ) لكل من الاقتران المحافظ الزمري والاقتران المحافظ الحلقى . وفي العادة يجب ان لا يكون هناك اي التباس . فمفهوم انه اذا كان $\phi: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ اقتراناً محافظاً وكانت كل من $\mathcal{H}$ و $\mathcal{H}'$ زميرتين (ولكن ليسا كلاهما حلقتين) فيكون ϕ اقتراناً محافظاً زمرياً بينما اذا كانت $\mathcal{H}$ و $\mathcal{H}'$ حلقتين فيكون ϕ اقتراناً محافظاً حلقياً . وبالطبع يمكن ان يكون اقتران من الحلقة $\mathcal{H}$ اقتراناً محافظاً زمرياً ليس اقتراناً محافظاً حلقياً (اي انه يحافظ على الجمع وليس الضرب). فمثلاً الاقتران $\phi: Z \rightarrow Z_n$ المعروف $\phi(a) = a \pmod{n}$ لكل $a \in Z$ هو اقتران محافظ زمري ولا يحافظ على الضرب في الحلقة.

وفي مثل هذه الحالة يكون ضرورياً تخصيص الاقتران بانه اقتران محافظ زمري.

لاحظ انه اذا كان ϕ اقتراناً محافظاً (حلقياً) من حلقة $\mathcal{H}$ الى حلقة $\mathcal{H}'$ فيكون ϕ اقتراناً محافظاً (زمرياً) من $(\mathcal{H}, +)$ الى $(\mathcal{H}', +)$. وبذا فيمكننا ان نتكلم عن ϕ (اي المجموعة

$$\{r : r \in \mathcal{H} \text{ و } \phi(r) = 0\}$$

وصورة $\mathcal{H}$ بالنسبة الى ϕ (اي المجموعة

$$\{r : r \in \mathcal{H} \text{ و } \phi(r) = 0\}$$

مسألة :

عرف اقتراناً $\phi : R \leftarrow M(R)$ بوضع

$$\phi \left(\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad \text{لكل } \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \in R.$$

١. هل يكون ϕ اقتراناً محافظاً حلقياً ؟ علل اجاباتك.

ب. هل تكون نواة ϕ حلقة جزئية من R ؟

ج. هل تكون الصورة لـ R بالنسبة الى ϕ حلقة جزئية من $M(R)$ ؟

هل تكون مثالية في $M(R)$ ؟

مسألة :

لتكن E مصفوفة لها نظير ضربي.

عرف اقتراناً $\phi : M(E) \leftarrow M(R)$ بوضع

$$\phi \left(\begin{pmatrix} s & e \\ e' & e'' \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} s & e \\ e' & e'' \end{pmatrix}$$

$$\text{لكل } \begin{pmatrix} s & e \\ e' & e'' \end{pmatrix} \in M(E). \text{ وكمثال على هذا الاقتران ، لتكن } E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

وهكذا فان

$$\phi \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

٢. برهن ان ϕ اقتران محافظ

ب. جد نواة ϕ .

ج. برهن ان ϕ اقتران شامل من $M(R)$ الى نفسها.

د. هل يكون ϕ تشاكلاً ؟

عند دراستنا للاقتران المحافظة الزمرية اثبتنا ان نواة الاقتران المحافظ تكون زمرة جزئية (طبيعية) من المجال وتشغل المثاليات مكانا في نظرية الحلقة مشابهاً للزمر الجزئية الطبيعية في نظرية الزمرة . وبذا قد نتوقع ان نواة الاقتران المحافظ الحلقى تكون حلقة جزئية هي ايضاً مثالية .

مسألة :

لتكن $(\cdot, +, \cdot)$ و $(\cdot, +, \cdot)$ حلقيتين وليكن $\phi : H \leftarrow H$ اقتراناً محافظاً . برهن العبارات

التالية :

٢. صورة $\mathcal{H}$ بالنسبة الى ϕ تكون حلقة جزئية من $\mathcal{H}$. (انظر النظرية ٥١ في الفصل ٢).

ب. تكون نواة ϕ مثالية في $\mathcal{H}$. (انظر النظرية ٤٨ في الفصل ٢).

عرضية :

لتكن $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ و $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ حلقتين وليكن ϕ اقتراناً محافظاً من $\mathcal{H}$ الى $\mathcal{H}$. فيكون ϕ تشاكلاً اذا وفقط اذا كانت نو $(\phi) = \{0\}$ و $\phi(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.
اترك برهان هذه العرضية للتمرين ٢.

تزدونا المسألة التالية بمثال للدور الذي تلعبه المثاليات في دراسة الاقترانات المحافظة لاي حلقة معينة.

مسألة :

لتكن $\mathcal{H}$ حلقة بلا مثاليات فعلاً وليكن ϕ اقتراناً محافظاً من $\mathcal{H}$ الى حلقة $\mathcal{H}$. برهن انه اذا كانت $\phi(R) \neq 0$ لبعض $R \in \mathcal{H}$ فان $\phi(S) \neq 0$ لكل $S \in \mathcal{H}$ غير الصفر.
وبذا تكون الاقترانات المحافظة على $\mathcal{H}$ هي فقط الاقتران المحافظ «الصغرى» (اي $\phi(R) = 0$ لكل $R \in \mathcal{H}$) وتلك الاقترانات تكون واحداً لواحد. (لماذا؟)

تمارين :

اي من الاقترانات التالية اقترانات محافظة (حلقية) ؟
علل اجاباتك . اذا كان الاقتران ϕ اقتراناً محافظاً فجد نو (ϕ) وحقق انه يكون مثالية في مجال الاقتران.

١. $\phi : \mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}$ معرف بالصيغة $\phi(p) = p$ لكل $p \in \mathbb{Z}$.

ب. $\phi : R \leftarrow R$ معرف بالصيغة $\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ، $d \in R$.

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{لكل } d \in R$$

ج. $\phi : M_2(R) \leftarrow R$ معرف بالصيغة

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + 1$$

$\phi : R \leftarrow M (R)$ معرفة بالصيغة

$$\begin{pmatrix} r^2 & r^- \\ r^2 & r \end{pmatrix} = (\phi) (r)$$

لكل $R \ni$

٢ - برهن العرضية ٢٤.

٣ - جد اقتراناً محافظاً $\phi : Z \leftarrow Z$ حيث ان نو $(\phi) = Z$ $\{Z \ni r : r \ni Z\}$

برهن ان الاقتران الذي عرفته يكون اقتراناً محافظاً حلقياً.

٤ - لتكن $(\cdot, +, \cdot)$ حلقة بعنصر محايد و S مجموعة غير خالية ولتكن Q $(S, \cdot)$

الحلقة المكونة من كل الاقترانات من S الى Q بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب النقطي

(انظر التمرين ١، ٣ - ٦). عين هل اي من الاقترانات التالية التي مجالها Q $(S, \cdot)$ اقتران محافظ ام لا.

اذا كان ϕ اقتراناً محافظاً فجد نواة ϕ وصورة Q $(S, \cdot)$ بالنسبة الى ϕ .

٢. $\phi : M(S, \cdot) \leftarrow Q$ معرف بالصيغة $\phi(p) = Q = Q(p)$

لكل $Q \ni Q$ $(S, \cdot)$ وحيث يكون $Q \ni S$ ثابتاً .

ب. $\phi : Q \ni Q \leftarrow Q(S, \cdot)$ معرف بالصيغة

$\phi(Q) = Q$ لكل $Q \ni Q(S, \cdot)$

ج. لتكن $Q \ni Q(S, \cdot)$ اقتران له نظير ضربى $Q/1$ عرف

$\phi : Q \ni Q \leftarrow Q(S, \cdot)$ بوضع

$\phi(Q) = Q/1$ لكل $Q \ni Q(S, \cdot)$.

٥ - لتكن $L(R^2)$ المجموعة المكونة من كل الاقترانات الخطية

$Q : R^2 \leftarrow R^2$ (حيث $Q \ni L(R^2)$ معرف بالصيغة

$Q(S, V) = (A^2 + B^2 + C^2 + D^2)$

لبعض الاعداد الحقيقية الثابتة A, B, C, D . فبعمليتي الجمع النقطي وتركيب

الاقترانات تكون $L(R^2)$ حلقة بعنصر محايد (انظر التمرين ١، ٣ - ٧).

برهن ان $L(R^2)$ تكون متشاكلة (حلقياً) مع الحلقة $M(R)$.

٦ - برهن انه اذا كانت Q حلقة وكان $\phi : M(R) \leftarrow Q$ اقتراناً محافظاً يحقق $\phi(E) \neq \cdot$

لبعض $E \ni M(R)$ فان $\phi(S) \neq \cdot$ لكل $S \ni M(R)$.

٧ - لتكن Q حلقة بعنصر محايد ١ ولتكن Q حلقة و $\phi : Q \leftarrow Q$ اقتراناً محافظاً.

برهن انه اذا كانت $\phi(1) = \cdot$ ، فان نو $(\phi) = Q$ Q (اي $\phi(r) = \cdot$ لكل $r \ni Q$).

لكن $\bar{C}$ و $\bar{C}$ حلقتين و ϕ : $\bar{C} \leftarrow \bar{C}$ اقتراناً محافظاً . برهن العبارات التالية :
 ؟. إذا كان ϕ اقتراناً شاملاً من $\bar{C}$ الى $\bar{C}$ وكانت $\bar{C}$ تبديلية فتكون $\bar{C}$ تبديلية (انظر
 المسألة ٢١ لوضع مثال ينتقض العبارة اذا حذف الشرط ان ϕ اقتران شامل).
 ب. اذا كانت ϕ واحداً لواحد (ولكن ليس من الضروري ان تكون شاملة) و $\bar{C}$ تبديلية
 فتكون $\bar{C}$ تبديلية .
 ح. اثبت بمثال انه اذا لم يكن ϕ واحداً لواحد فيمكن ان تكون $\bar{C}$ تبديلية في حين أن $\bar{C}$
 لا تكون تبديلية.

٩. لتكن $(\bar{C}, +, \cdot)$ حلقة بعنصر محايد ١ ولتكن $(\bar{C}, +, \cdot)$ حلقة.

ليكن ϕ اقتراناً محافظاً شاملاً من $\bar{C}$ الى $\bar{C}$. برهن العبارات التالية :

١. للحلقة $\bar{C}$ عنصر محايد ضربي و $\phi = (1)$.

ب. اذا كانت R لها مظهر ضربي في $\bar{C}$ فان $\phi(R)$ لها نظير ضربي في $\bar{C}$.

ما هو نظير $\phi(R)$ ؟

١٠. ليكن ϕ اقتراناً محافظاً من حلقة $\bar{C}$ الى حلقة $\bar{C}$.

برهن العبارات التالية :

١. اذا كانت $\bar{C}$ مثالية في $\bar{C}$. فالصورة العكسية

$\phi^{-1}(\bar{C}) = \{R : R \subset \bar{C} \text{ و } \phi(R) \subset \bar{C}\}$ تكون مثالية في $\bar{C}$.

(انظر التمرين ٢,٤ - ١٤).

ب. اذا كان ϕ اقتراناً شاملاً من $\bar{C}$ الى $\bar{C}$ و $\bar{C}$ مثالية في $\bar{C}$ فمجموعة الصورة $\phi(\bar{C})$

تكون مثالية في $\bar{C}$. ويمكن عمل عبارات مشابهة للمثاليات اليمنى واليسرى.

٣,٥ الحلقات الحدودية

هل هناك طرق للبدء بحلقة $\mathcal{H}$ بعنصر محايد وبناء حلقات أخرى تحتوي على $\mathcal{H}$ ؟
وكتوضيح لحل هذا السؤال ، لنعتبر الحلقة Q واي عدد غير نسبي α . فكل من Q و α محتواة في الحلقة R . لنجد اصغر حلقة جزئية $Q[\alpha]$ تحتوي كلا منها Q و α . ونعني «باصغر حلقة جزئية» ان تكون كل حلقة جزئية من R تحتوي على Q و α تحتوي ايضاً على $Q[\alpha]$.

مسألة :

- لتكن $\mathcal{H}$ اي حلقة جزئية من R التي تحتوي على كل من Q و α .
١. وضح لماذا يجب ان تكون كل العناصر التالية في $\mathcal{H}$: $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^n$ ، حيث n اي عدد صحيح موجب ، $\alpha^2 - \alpha$ و $2\alpha - \frac{3}{4}$.
ب. اثبت ان $\mathcal{H}$ يجب ان تحتوي على كل التعبيرات التي تأخذ الصيغة
$$\alpha^n + \alpha_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + \alpha_1\alpha + \alpha_0$$

حيث n تكون اي عدد صحيح غير سالب و $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in Q$.
اعط عدة امثلة محددة لعناصر بهذه الصيغة .

$$\text{لتكن } Q[\alpha] = \left\{ \sum_{i=0}^n \alpha_i \alpha^i : \alpha_i \in Q, n \geq 0 \right\}$$

- ان امثلة خاصة على عناصر في $Q[\alpha]$ معطاة في الجزأين ١ و ب .
تحقق ان $Q[\alpha]$ تكون حلقة جزئية من R ومن ثم فانها اصغر حلقة جزئية تحتوي على كل من Q و α .
ولننظر الآن في بعض الأمثلة المحددة لهذه الحلقة الجزئية.

مسألة :

لتكن $\sqrt{2} = \alpha$. في هذه الحالة يمكننا ان نحصل على وصف صريح لـ $Q[\sqrt{2}]$.
اثبت ان

$$Q[\sqrt{2}] = \{ \sqrt{2}b + a : a, b \in Q \}$$

(انظر التمرين ١,٢-٥ و ١,٢-٦) لاحظ انه في $Q[\sqrt{2}]$ ،

$$a + \sqrt{2}b = c + \sqrt{2}d \text{ اذا وفقط اذا كان } a = c, b = d$$

مسألة :

وكتوضيح آخر للحلقة Q $[\alpha]$ ، لتكن $\sqrt[2]{\alpha} = \sqrt[2]{\alpha}$ فتكون $Q[\sqrt[2]{\alpha}]$ اصغر حلقة جزئية من R التي تحتوي على كل من Q و $\sqrt[2]{\alpha}$.

اثبت ان $Q[\sqrt[2]{\alpha}] = \{ \alpha^r + \sqrt[2]{\alpha} \alpha^r + \sqrt[2]{\alpha}^2 \alpha^r + \dots + \sqrt[2]{\alpha}^{r-1} \alpha^r : \alpha^r \in Q, r = 0, 1, 2, \dots \}$ وهكذا فان $Q[\sqrt[2]{\alpha}] \supseteq Q$.

لقد لاحظنا في المسألتين ٢٧ و ٢٨ أن كلا من العددين $\sqrt[2]{\alpha}$ ، $\sqrt[2]{\alpha}$ له الخاصية ان احدى قواه هي عنصراً للحلقة Q . وهذا لا ينطبق على العدد α .

وزيادة على ذلك فتخبرنا نظرية الاعداد انه لكل عدد صحيح موجب n ولكل مجموعة $\{ \alpha^r : r = 0, 1, 2, \dots \}$ $Q \ni \{ \alpha^r : r = 0, 1, 2, \dots \}$ ،

حيث $\alpha^n \neq 0$ فيكون العدد

$$\alpha^n + \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \dots + \alpha + 1$$

غير نسبي . في ضوء هذا نعتبر الحلقة $Q[\alpha]$ لاحظ ان

$$Q[\alpha] = \left\{ \sum_{i=0}^n \alpha^i \alpha^r : r \in \mathbb{Z} \cup \{0\}, 0 \leq r \leq n \right\} .$$

يكون العنصران $\sum_{i=0}^n \alpha^i \alpha^r$ و $\sum_{i=0}^m \alpha^i \alpha^s$ في الحلقة $Q[\alpha]$ متساويين

اذا وفقط اذا تساوت معاملات القوى α المتساوية . وبهذا تكون المعاملات في Q ،

$$\sum_{i=0}^m \alpha^i \alpha^s = \sum_{i=0}^n \alpha^i \alpha^r \text{ اذا وفقط اذا كان } m = n \text{ و } \alpha^s = \alpha^r$$

حيث $r = 0, 1, 2, \dots, n$.

اترك برهان الحقيقة للتمرين ٢ . وهذا النوع من المساواة حداً حداً ، لا يكون صحيحاً للحلقات

$$Q[\sqrt[2]{\alpha}] \text{ او } Q[\sqrt[2]{\alpha}] .$$

مسألة :

$$\text{اعط مثالا لتعبرين } \sum_{i=0}^m \alpha^i \alpha^r \text{ و } \sum_{i=0}^n \alpha^i \alpha^s$$

بحيث يكونان متساويين في $Q[\alpha]$ ولكن $\alpha^r \neq \alpha^s$ لبعض قيم r

مسألة :

أ. بما ان $Q [\pi]$ حلقة جزئية من R ، فنحصل على الخاصتين التجميعية والتبديلية للجمع

. باستخدام هاتين الخاصتين جد المعامل لـ π^u في الجمع

$$\sum_{r=0}^n a_r \pi^r + \sum_{r=0}^n b_r \pi^r \text{ حيث } m \geq n.$$

ب. عند ضرب عنصرين من $Q [\pi]$ تستطيع استخدام قانون توزيع لنحصل على التعبير التالي :

$$\left(\sum_{r=0}^n a_r \pi^r \right) \left(\sum_{s=0}^m b_s \pi^s \right) = \left(\sum_{r=0}^n a_r \pi^r \right) (b_0 \pi^0 + b_1 \pi^1 + \dots + b_m \pi^m)$$

$$+ \left(\sum_{r=0}^n a_r \pi^r \right) (b_1 \pi^1 + b_2 \pi^2 + \dots + b_m \pi^m) + \dots$$

$$+ \left(\sum_{r=0}^n a_r \pi^r \right) (b_m \pi^m) + \dots$$

في هذا الضرب ما هو معامل π^{n+m} ؟ ، معامل π^n ؟ معامل π^{1-n} ؟

للإجابة على السؤال كيف نستطيع بناء حلقة اوسع من حلقة معطاة ، لنعمم الحلقة $Q [\pi]$. لتكن π حلقة بعنصر محايد ولتكن s ترمز لعنصر لا ينتمي الى π . فاذا كانت s و π كلتاهما محتواة في حلقة اوسع فأى تعبير يأخذ الصيغة $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$.

الذي معاملاته a_r π . يكون عنصراً في هذه الحلقة الاكثر اتساعاً. ولكننا لا نفترض ان كلا من s و π محتواة في حلقة اوسع. وبدلاً من ذلك تكون التعبيرات $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$.

حيث n يكون عدداً غير سالب و $a_r \in \pi$ ، $r = 0, 1, 2, \dots, n$.

ونشترط ان للعنصر s الخاصية التالية : تكون الصيغتان

$$a_1 s + a_0 + \dots + a_n s^n + b_1 s + b_0 + \dots + b_m s^m \text{ متساويتين حيث}$$

$$a_r, b_r \in \pi \text{ حيث } r = 0, 1, \dots, n \text{ و } k = 0, 1, \dots, m$$

اذا وفقط اذا كان $m = n$ و $a_r = b_r$ لجميع $r = 0, 1, \dots, n$. ويسمى عنصر s بهذه

الخاصية غير معين على π .

وباستخدام $Q [\mathbb{C}]$ كدليل يمكننا ان نعرف الآن مجموعة تحتوي على كل من S وعناصر $\mathbb{C}$.

تعريف :

لتكن $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ حلقة بعنصر محايد ولتكن S غير معينة على $\mathbb{C}$.

ترمز $\mathbb{C} [S]$ بالمجموعة المكونة من كل الصيغ $\mathbb{C} : a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$.

حيث n عدد صحيح غير سالب و $a_i \in \mathbb{C}$ ، $r = 0, 1, \dots, n$.

نعرف ١. $s = s$ ولأي $a \in \mathbb{C}$ نعرف as لتكون العنصر ٢. وتسمى a في الصيغة as بمعامل s . وتسمى الصيغة التي تأخذ الشكل $\mathbb{C}$ بالحدودية في S ذات المعاملات في $\mathbb{C}$. وبذا فان $\mathbb{C} [S]$ تكون المجموعة المكونة من كل الحدوديات في S ذات المعاملات في $\mathbb{C}$.

مسألة :

٢. اعط عدة امثلة على عناصر من $Z [S]$.

ب. اعط عدة امثلة على عناصر من $Z [S]$.

لتكن $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ حلقة بعنصر محايد . فتسمى الحدودية

$$(0) s^n + (0) s^{n-1} + \dots + (0) s + (0)$$

بالحدودية الصفرية ونرمز لها عادة بالرمز (0) .

ولكل حودية في $\mathbb{C} [S] - \{ (0) \}$ يوجد اكبر عدد صحيح غير سالب m بحيث يكون معامل s^m مخالفاً للصفر . ويسمى هذا العدد الصحيح m درجة الحدودية ويسمى المعامل a_m لمعامل s^m بالمعامل الرئيسي للحدودية.

والحدودية الصفرية درجتها حسب التعريف صفر . واذا كان للحدودية $q(s) \in \mathbb{C} [S]$ الدرجة m فانه يمكننا كتابة

$$q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

حيث $n \geq m$ علماً بان $a_m \neq 0$ لكل $r = m, m+1, \dots, n$ فمثلاً

$$s^2 + 1 = s^2 + 0s + 1 = s^2 + 0s^1 + 1s^0$$

وبذا فيمكن اعتبار ان لحدوديتين نفس العدد من الحدود مع ان درجتهما يمكن ان تكونان مختلفتين . ومن ناحية اخرى فعندما نعمل بحدوديات معينة نجد عادة من الملائم ان نحذف الحدود ذات المعاملات الصفرية.

تعريف :

حاصل الجمع $q(s) + d(s)$ لحدوديتين

$$\sum_{r=1}^n \text{بـ سـ ر} = \text{د (س)} , \quad \sum_{r=1}^n \text{قـ سـ ر} = \text{قـ (س)}$$

في حـ [س] يعرف بالحدودية

$$\text{قـ (س)} + \text{د (س)} = \sum_{r=1}^n (\text{بـ ر} + \text{قـ ر}) \text{ سـ ر}$$

$$= (\text{بـ} + \text{قـ}) \text{ سـ} + \dots + (\text{بـ-1} + \text{قـ-1}) \text{ سـ-1} + \dots + (\text{بـ} + \text{قـ}) \text{ سـ} =$$

وبهذا فان معامل سـ في الجمع قـ (س) + د (س) يكون الجمع المعاملات سـ في قـ (س) ود (س). تذكر انه اذا كانت درجة قـ (س) م > ن فان ر = 0 لكل ر = م + 1 , ... , ن وبالمثل بالنسبة الى د (س).

مسألة :

٢. في Z (س) جد حاصل جمع الحدوديتين

$$\text{قـ (س)} = \text{س}^2 + \text{س}^3 + 1 , \quad \text{د (س)} = \text{س}^2 + 1$$

ب. في Z [س] جد حاصل جمع الحدوديتين

$$\text{ق (س)} = \text{س}^2 + \text{س}^3 + \text{س}^2 + \text{س}^2 - \text{س}^3 = \text{د (س)}$$

تعريف :

حاصل ضرب حدوديتين ق (س) = س^٢ و د (س) = بـ سـ في حـ [س] هو الحدودية

$$\text{قـ (س) د (س)} = \text{بـ سـ}$$

$$\sum_{r=1}^n \text{قـ سـ ر} = \text{قـ (س)}$$

و د (س) = بـ سـ بالحدودية

$$\text{قـ (س) د (س)} = \text{س}^2 + \text{س}^3 + (\text{بـ سـ}) + \dots + (\text{بـ سـ}) + (\text{بـ سـ}) + \dots + (\text{بـ سـ}) + (\text{بـ سـ})$$

واخيراً نعرف حاصل ضرب حدوديتين عامتين بالحدودية

$$\begin{aligned} \text{ضمة} \quad \text{قه} (س) د (س) &= \left(\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} s^r \right) \left(\sum_{e=0}^m \binom{m}{e} s^e \right) \\ &= \left(\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} s^r \right) + \left(\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} s^r \right) + \dots \\ &= \left(\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} s^r \right) + \left(\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} s^r \right) + \dots \end{aligned}$$

لاحظ ان تعريف حاصل الضرب ذو ثلاث مراحل . وفي حساب حاصل ضرب حدوديتين يبدأ الطالب بالتعريف ضمة وبعدها يطبق تعريف صمة واخيراً تعريف لم.

مسألة : ٣٦

٢. جد حاصل الضرب لازواج الحدوديات في المسألة ٣٤. ما درجة حاصل الضرب في كل حالة ؟
 ب. اذا كانت (ح، +، ٠) حلقة بعنصر محايد فاوجد حاصل الضرب للحدوديتين في جـ [س].
 قه (س) = $s^2 + s + 1$ و د (س) = $s^3 + s^2 + s + 1$.
 اكتب حاصل الضرب بالصيغة حـرس. اذا كانت $s^p \neq 0$ فما درجة قه (س) د (س)؟

مسألة : ٣٧

١. لتكن

$$\text{قه} (س) = \sum_{e=0}^m \binom{m}{e} s^e \quad \text{و} \quad \text{د} (س) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} s^r$$

- جد معاملات s^{m+1} ، s^{m+2} ، s^{m+3} في حاصل الضرب قه (س) د (س).
 ب. بين ان اربريظهر في معامل s^m في حاصل الضرب قه (س) د (س) اذا وفقط اذا كان $r + y = k$ او ما يكافئه ، $y = k - r$. وبعد ذلك بين ان معامل s^m في حاصل الضرب قه (س) د (س) هو _____ .

مسألة : ٣٨

١. لتكن قه (س) ، د (س) حدوديتين درجاتهما m و n على الترتيب في جـ [س] ولتكن $n \leq m$

فان درجة مجموعهما $q(s) + d(s)$ لا تزيد عن ——— ، لان درجة حاصل الضرب $q(s)d(s)$ لا تزيد عن ——— . اكمل العبارات وبرهن عليها.

ب. بين بمثال ان التساوي يمكن ان لا يتحقق في كلا الحالتين.

ج. اعط مثال على حدوديات يكون لحاصل جمعها وحاصل ضربها الدرجة العظمى التي ذكرت اعلاه.

صرنا الان على استعداد لبرهنة ان $[s]$ تكون حلقة تحتوي على الحلقة الاصلية فعلا

مسألة : ٣٩

لتكن $(\cdot, +, \cdot)$ حلقة ذات عنصر محايد فتكون $(\cdot, +, (s))$ حلقة بعنصر محايد وتدعى الحلقة الحدودية على $\cdot$. وزيادة على ذلك تكون $\cdot$ حلقة جزئية من $[s]$. وفي المسألة التالية جزء من برهان النظرية وسيأتي اكمال البرهان في التمارين .

مسألة : ٤٠

برهن اولاً ان $(\cdot, +, [s])$ زمرة تبديلية . (استخدم رمز الجمع $\sum_{i=1}^n$)

ان الخاصيتين التجميعية والتوزيعية قد تركتا للتمرينين ٣ و ٤ .
جد عنصراً محايداً للضرب في $[s]$. وبعد ذلك برهن ان $\cdot$ تكون حلقة جزئية فعلاً من $\cdot$ $[s]$.

نظرية :

لتكن $(\cdot, +, \cdot)$ حلقة . فتكون $[s]$ حلقة تبديلية اذا وفقط اذا كانت $\cdot$ حلقة تبديلية .
يترك برهان هذه النظرية للتمرين ٥ .

تمارين :

١ - اي من التالية تكون حلقة جزئية من $Z[s]$ ؟ علل اجاباتك.

$$١. \{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 : a_i \in Z, n \in Z\}$$

وبما انه من الممكن ان تتغير في Z فتكون هذه المجموعة مكونة من كل الحدوديات الثابتة اصفار.

$$ب. \{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 : a_i \in Z, r \geq n, n \leq 4\}$$

$$ج. \{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 : a_i \in Z, r = 0, \dots, 5\}$$

د. $\{(s - p) \text{ قه } (s) : \text{قه } (s) \in Z [s] \text{ حيث } p \in Z \text{ ثابت ان هذه المجموعة مكونة}$

من كل الحدوديات في $Z [s]$ التي تكون مضاعفات $s - p$.

٢ - برهن انه في الحلقة $Q [x]$

$$\sum_{r=0}^n a_r x^r = \sum_{r=0}^p b_r x^r \text{ حيث } m \text{ و } n \text{ عدنان صحيحان غير}$$

سالين و $a_r, b_r \in Q$ لكل $0 \leq r \leq n, 0 \leq r \leq m$ ، اذا فقط اذا كان $m = n$ ($a_r = b_r$ لكل $r = 0, 1, \dots, n$).

٣ - لتكن $(\cdot, +, \cdot)$ حلقة بعنصر محايد . برهن ان الضرب يكون تجميعياً في $[s]$.

٤ - لتكن $(\cdot, +, \cdot)$ حلقة بعنصر محايد . برهن ان الضرب يكون توزيعياً على الجمع في $[s]$.

٥ - برهن النظرية ٤١ .

٦ - برهن على ان $Z[s]$ تكون حلقة لا نهائية لكل عدد صحيح $n \leq 2$.

٧ - برهن انه اذا كانت $\mathcal{C}$ احدى الحلقات Z, Q أو R فكل $\text{قه } (s)$ ، $\text{هـ } (s) \in \mathcal{C} [s]$ -

$\{0\}$ تكون درجة حاصل الضرب $\text{قه } (s)$ هـ (s) تساوي حاصل جمع درجتي $\text{قه } (s)$ و هـ

(s) .

وبالرمز فلو رمزنا لدرجة الحدودية هـ (s) بالرمز $\text{در } (s)$ فان

$$\text{در } (\text{قه } (s) \text{ هـ } (s)) = \text{در } (\text{قه } (s)) + \text{در } (\text{هـ } (s))$$

حيث $\text{قه } (s)$ وهـ (s) حدوديتان غير صفريتين في الحلقات $Z [s]$ أو $Q [s]$ أو $R [s]$.

ما هي الخاصية الخصوصية للحلقات Z, Q أو R التي استعملتها في برهانك ؟

٨ - ٢. وصفنا في المسألة ٢٦ اصغر حلقة جزئية من R تحتوي في كلا من Q وعدد غير نسبي

α . وبشكل عام لتكن $\mathcal{C}$ اي حلقة جزئية من حلقة $\mathcal{C}$ بعنصر محايد و α اي عنصر في

$\mathcal{C} - \mathcal{C}$. اثبت انه يوجد اصغر حلقة جزئية $\mathcal{C} [\alpha]$ من $\mathcal{C}$ بحيث تحتوي على $\mathcal{C}$ و α

وصف العناصر في $\mathcal{C} [\alpha]$.

ب. لتكن $\mathcal{C} = Q [x]$. صف العناصر في $\mathcal{C} [x]$.

هذه هي الحلقة $Q [x]$ مضافاً لها x^3 وتكتب عادة $Q [x, x^3]$

٩ - ٢. ليس للمعادلة $٢ - ٢ = ٠$ حل في Q . اثبت انه يوجد حل للمعادلة في $Q [\sqrt{2}]$.

ب. اثبت ان لكلا المعادلتين $٢ - ٢ = ٠$ و $٢ - ٢ = ٠$ حلولاً في $Q [\sqrt{2}]$.

ح. لتكن α حلقة جزئية من R ذات عنصر محايد. افترض انه ليس للمعادلة $\alpha^2 - ٢ = ٠$

حل في α ، حيث $\alpha^2 \in \alpha$ و $\alpha^2 = \alpha$ ولتكن $\alpha = \sqrt{2}$ رمزاً يمثل

حلاً للمعادلة ابن حلقة بحيث يكون للمعادلة حل فيها وصف عناصر هذه الحلقة.

١٠. *ليكن α عدداً حقيقياً ليس موجوداً في Z . ولتكن

$$\{ \alpha \} U^+ Z \ni n, z \in \mathbb{Z} : \alpha^2 = n^2 + z^2 = [\alpha] Z$$

٢. برهن ان $[\alpha] Z$ تكون حلقة جزئية من R .

ب. برهن انه اذا كانت α حلقة جزئية من R بحيث تحتوي على Z و α فان $[\alpha] Z \cong$

α (ولهذا فان $[\alpha] Z$ تكون اصغر حلقة تحتوي على Z و α).

ح. برهن ان $[\alpha] Z$ تكون حلقة جزئية فعلاً من $Q [\alpha]$.

د. برهن انه اذا كانت $\alpha \in Z$ و $\alpha^2 = \alpha$ فان $Z \not\subseteq \alpha$

$$\{ \alpha \} U^+ Z \ni n, z \in \mathbb{Z} : \alpha^2 = n^2 + z^2 = [\alpha] Z$$

١١. لتكن $\alpha \in Q$ عدد يحقق $\alpha^2 \notin Q$.

$$\{ \alpha \} U^+ Z \ni n, z \in \mathbb{Z} : \alpha^2 = n^2 + z^2 = [\alpha] Z$$

ب. برهن انه اذا كانت $\alpha \in Q$ و $\alpha^2 \notin Q$ فان $[\alpha] Z \cong$

$$\{ \alpha \} U^+ Z \ni n, z \in \mathbb{Z} : \alpha^2 = n^2 + z^2 = [\alpha] Z$$

١٢. ٢. لتكن $(\alpha, +, \cdot)$ حلقة ذات عنصر محايد ولتكن S غير معينة على α . لقد بينا

الحلقة $\alpha[S]$ والآن لتكن α غير معينة على $\alpha[S]$ وتبديلية مع S . صف

العناصر في $\alpha[S]$ $[S]$. نرمز لهذه الحلقة عادة بالرمز $\alpha[S, \alpha]$.

ب. صف طريقة لبناء الحلقة $\alpha[S, \alpha]$ $[S, \alpha, \dots, S, \alpha]$

المكونة من الحدوديات في n من العناصر غير المعينة $S, \alpha, \dots, S, \alpha$ التي

تتبادل بعضها مع بعض. اعط عدة امثلة لعناصر من $\alpha[S, \alpha]$ $[S, \alpha, \dots, S, \alpha]$

ج -

٣,٦ الحلقات الكاملة

رأينا حتى الآن خصائص متباينة للضرب في الحلقات المختلفة . وتفحصنا حلقات عامة يمكن للضرب فيها ان يكون فقط تجميعياً وتوزيعي على الجمع . ومرة معنا ايضاً حلقات لها عنصر محايد ضربي وحلقات يكون فيها الضرب تبادلياً . ونركز الآن انتباهنا على خاصية الاختزال للضرب في حلقة . وهذه الخاصية تتحقق في بعض الحلقات وتفشل فشلاً ذريعاً في حلقات أخرى وسنتعامل خلال هذا البند مع حلقات غير تافهة (اي حلقات باكثر من عنصر واحد).

مسألة :

اعتبر الخاصيتين التاليتين في حلقة ما R :

١. لكل $a, b, c \in R$ ، إذا كانت $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ ، $c \neq 0$ ، فإن $a \cdot b = 0$.

٢. لكل $s, v \in R$ ، إذا كانت $s \cdot v = 0$ ، فإن $s = 0$ أو $v = 0$.
تحقق فيما إذا كانت كل من هاتين الخاصيتين صحيحة في $\mathbb{Z}_n$.

مسألة :

برهن النظرية التالية

نظرية :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة . فتكون العبارتان التاليتان متكافئتين (اي ان كليهما صحيحة او كليهما خطأ).

١. لكل $a, b, c \in R$ ، إذا كانت $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ ، $c \neq 0$ ، فإن $a \cdot b = 0$.

٢. لكل $s, v \in R$ ، إذا كانت $s \cdot v = 0$ ، فإن $s = 0$ أو $v = 0$.

في أي حلقة معطاة R تتضمن النظرية ان العبارتين ١ و ٢ متكافئتان لكنها لا تضمن صحة العبارتين.

ويمكن كتابة النظرية التالية بالصيغة التالية :

نظرية :

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة . فان العبارتين التاليتين متكافئتان :

١. لكل $a, b, c \in R$ ، إذا كانت $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ ، $c \neq 0$ ، فإن $a \cdot b = 0$.

٢. لكل $s, v \in R$ ، إذا كانت $s \cdot v = 0$ ، فإن $s = 0$ أو $v = 0$.

إذا لم تتحقق العبارة ٢ في حلقة معطاة فهناك اسم خاص تطلقه على تلك العناصر التي كانت السبب في ذلك .

تعريف :

لتكن (ح، +، ٠) حلقة. فإذا كانت س، ص زوج و س ≠ ٠ و ص ≠ ٠ ولكن س ص = ٠ فتسمى س و ص قواسم الصفر أو قواسم صفرية.

مسألة :

جد القواسم الصفرية في ${}_Z$ ، في ${}_OZ$.
إذا تحقق تكافؤ العبارتين ٢ و $ب$ في النظرية ٤٣ (أو ٢ ، $ب$ في ٤٣) في حلقة تبديلية ذات
عنصر محايد فتعطي الحلقة اسماً خاصاً.

تعريف :

الحلقة الكاملة (ح، +، ٠) هي حلقة تبديلية ذات عنصر محايد بحيث يتحقق قانون الاختزال للضرب اي انه لكل a, b, c ، $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ ، $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot c$ فان $a = 0$.

مسألة : ٤٣

اي من النظم التالية تكون حلقات كاملة مع العمليات العادية ؟
 علل اجاباتك . انظر الملاحق ٣ عن خصائص الاعداد الحقيقية .

- $$\begin{array}{ll} (\cdot, +, Z) & \text{أ.} \\ (\cdot, +, Q) & \text{ب.} \\ (\cdot, +, R) & \text{ج.} \\ (\cdot, +, Z) & \text{د.} \end{array}$$

مسألة : ٤٤

لتكن $Q = [\sqrt{2}]$ ، $\{Q \ni b, p, \sqrt{2}/b + p\} = [\sqrt{2}]$

رأينا ان $Q[\sqrt{2}]$ تكون حلقة جزئية من R بالنسبة للعمليات العاديتين في R .

برهن او انف ان $(Q, \sqrt{2}, +, \cdot)$ تكون حلقة كاملة.

تذكر ان العناصر في $Q[\sqrt{2}]$ كلها اعداد حقيقية.

لقد لاحظنا انه اذا لم تتحقق العبارة ب من النظرية ٤٣ فيجب ان يكون للحلقة قواسم صفرية . وبما ان هذه العبارة مرتبطة ارتباطاً وثيقاً بالاختزال للضرب فيقولونا هذا الى ان نسأل السؤال التالي :

مسألة : ٤٥

هل يمكن لحلقة كاملة (ك ، + ، ٠) ان يكون لها قواسم صفرية ؟ علل اجابتك .
اعد ذكر التعريف لحلقة كاملة بدلالة قواسم الصفر بدلا من الاختزال.

لتعيين قيم n و Z^+ التي تكون فيها Z حلقة كاملة لنكتشف أولا احتمالات وجود قواسم الصفر في Z .

مسألة : ٤٦

اثبت انه اذا كانت $n = r$ م حيث n, r م اعداد صحيحة اكبر من 1 فان r و m تكونان قواسم للصفر في الحلقة Z_n (يجب ان تبرهن ان كلا من r و m لا يكون العنصر الصفري في Z_n)

مسألة :

اكمل العبارة التالية وبرهنها : تكون الحلقة Z حلقة كاملة اذا وفقط اذا كانت ن _____ .

تمارین :

- ١ - ٢. هل تتحقق خاصية الاختزال للضرب (العبارة ١ في المسألة ٤٣)
في $(M, +, \cdot, R)$ ؟ لماذا ؟
ب. هل تكون M حلقة كاملة ؟ لماذا ؟
٢ - ج. حلقة جزئية من M تكون حلقة كاملة.
٣ - ١. برهن انه اذا كانت $(\cdot, +, \cdot)$ حلقة وكان S ح. قاسماً للصفر فلا يوجد لهذا
العنصر نظير ضربي .
ب. هل عكس العبارة صحيح ؟ اي اذا كانت S ح. ليس لها نظير ضربي فهل من
الضروري ان يكون S قاسماً للصفر ؟
٤ - لتكن K حلقة كاملة . فاذا كانت V حلقة جزئية من K ، فهل من الضروري ان تكون
حلقة كاملة ؟ علل اجابتك.
٥ - لتكن (R, R) الحلقة المكونة من كل الاقترانات من R الى نفسها بالنسبة لعمليتي
الجمع والضرب النقطي .
(انظر التمرين ١، ٢ - ٦ . اثبت ان (R, R) لا يكون حلقة كاملة).
٦ - هل تكون $Z[S]$ ، الحلقة المكونة من الحدوديات على Z في عنصر غير معين S ، حلقة
كاملة ؟ علل اجابتك.
٧ - برهن انه اذا كانت $(\cdot, +, \cdot)$ حلقة كاملة واذا كانت Q (س) ، $\cdot$ (س) ح. $[S]$ - $\{0\}$
فتكون درجة حاصل الضرب $Q(S)$ هـ (س) هو حاصل جمع درجتي $Q(S)$ و هـ (س)
وبالرموز
$$\text{در } (Q(S) \cdot H(S)) = \text{در } (Q(S)) + \text{در } (H(S))$$

٨ - لتكن $(\cdot, +, \cdot)$ حلقة ذات عنصر محايد . برهن ان $J[S]$ تكون حلقة كاملة.
اذا فقط اذا كانت H حلقة كاملة

٩. لتكن $\bar{c}$ و $\bar{c}$ حلقتين وليكن $\emptyset : c \leftarrow \bar{c}$ تشاكلا.

اثبت انه اذا كانت $\bar{c}$ حلقة كاملة فتكون $\bar{c}$ حلقة كاملة .
ويكون العكس صحيحاً ايضاً لانه اذا كان $\emptyset$ تشاكلا فيكون الاقتران العكسي $\bar{c}^{-1}$ تشاكلا .
(انظر التمرين ٢,٥ - ١١).

١٠. برهن انه اذا كانت $\bar{c} \in Z$ و $\bar{c} \in Z$ فتكون الحلقة

$$\{ \bar{c} \in Z : \bar{c} + \bar{c} = \bar{c} \} = [\bar{c}]$$
 حلقة كامله.

١١. لقد واجهت سابقاً الاعداد المركبة $\bar{c} + \bar{c}$ حيث $\bar{c} \in R$. ان الحرف $\bar{c}$ يرمز لما يسمى
بالعدد التخيلي الذي يحقق $\bar{c}^2 = -1$.

تذكر ان

$$(\bar{c} + \bar{c}) + (\bar{c} + \bar{c}) = \bar{c} + \bar{c}$$

$$(\bar{c} + \bar{c}) \cdot (\bar{c} + \bar{c}) = \bar{c} + \bar{c}$$

ان الفكرة في المسألة التالية هي بناء المجموعة المكونة من الاعداد المركبة من المجموعة
المألوفة $\bar{c}$.

لتكن $C = \{ (\bar{c}, \bar{c}) : \bar{c} \in R \}$. فمن تعريف الضرب الديكارتي فان $(\bar{c}, \bar{c}) =$
 $(\bar{c}, \bar{c})$ اذا وفقط اذا كان $\bar{c} = \bar{c}$ و $\bar{c} = \bar{c}$.

لقد لاحظنا ان الجمع لعنصرين $(\bar{c}, \bar{c})$ و $(\bar{c}, \bar{c})$ من C يعرف بالشكل :

$$(\bar{c}, \bar{c}) + (\bar{c}, \bar{c}) = (\bar{c} + \bar{c}, \bar{c} + \bar{c})$$

وبهذا الجمع تكون C زمرة تبديلية . (انظر التمرين ١,١ - ٤ و ١,٢ - ١٠).

ويعرف حاصل ضرب العنصرين $(\bar{c}, \bar{c})$ و $(\bar{c}, \bar{c})$ في C بان $(\bar{c}, \bar{c}) \cdot (\bar{c}, \bar{c}) =$
 $(\bar{c} \cdot \bar{c}, \bar{c} \cdot \bar{c})$.

١. برهن ان $(0, 0)$ تكون تبديلية ذات عنصر محايد.

ب. اثبت ان كل عنصر من C مخالف للصفر له نظير ضربي

ح. هل تكون $(0, 0)$ حلقة كاملة ؟ علل اجابتك.

د. جد عنصراً $(\bar{c}, \bar{c}) \in C$ بحيث ان $(\bar{c}, \bar{c}) = (0, 0)$.

هـ. برهن ان $(0, 0)$ تكون متشاكلة مع حلقة جزئية من C مكونة من كل العناصر
 $(\bar{c}, \bar{c})$ حيث $\bar{c} \in R$.

٣,٧ الحقول

رأينا عدة حلقات تبديلية ذات عنصر محايد يكون فيها لكل عنصر غير الصفر نظير ضربي .
هذه الحلقات تدعى الحقول . وفي هذا البند نستخدم نظرية الحقول في برهنة بعض النتائج المهمة
والمفيدة في نظرية الاعداد .
ونناقش في نهاية البند لمحة تاريخية عن الحقول .

تعريف :

الحقل (ق، +، ٠) هو حلقة تبديلية غير تافهة ، ق، ذات عنصر محايد بحيث يكون لكل عنصر في ق،
مغاير للصفر نظير ضربي في ق،.

مسألة :

اي من المجموعات التالية هي حقول بالنسبة للعمليات العاديتين الجمع والضرب ؟ علل اجاباتك.

٢. R

ب. Q

ج. Z

د. $\mathbb{Z}_6$

هـ. $\mathbb{Z}_7$

الحلقة زمرة بالنسبة للجمع . فمتى تكون المجموعة المكونة من عناصر غير صفيرية في حلقة زمرة بالنسبة
للضرب ؟ تعطي النظرية التالية جواباً لهذا السؤال في الحالة التي تكون فيها الحلقة تبديلية.

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن ح حلقة تبديلية . فتكون ح حقلاً اذا وفقط اذا كانت ح - {٠} زمرة بالنسبة للضرب .

نعلم ان كل حلقة كاملة هي حلقة . والمسألة التالية تكمل هذه السلسلة باثبات ان كل حقل هو حاقة
كاملة.

مسألة :

٢. برهن انه اذا كان (ق، +، ٠) حقلاً فانه حلقة كاملة .

ب. هل كل حلقة كاملة هي حقل أيضاً؟ علل اجابتك ببرهان أو باعطاء مثال على حلقة كاملة ليست حقلاً.

هنالك عكس لمضمون المسألة ٢٥٥ عندما تكون الحلقة الكاملة منتهية . وهذا هو محتوى النظرية التالية :

مسألة :

اثبت النظرية التالية :

نظرية :

كل حلقة كاملة منتهية هي حقل : فاذا كانت $(\varphi, +, \cdot)$ حلقة كاملة وكانت φ مجموعة منتهية تكون $(\varphi, +, \cdot)$ حقلاً .

عليك ان تبرهن ان لكل عنصر $a \in \varphi - \{0\}$ نظيراً ضربياً ولعمل ذلك اعتبر المجموعة $\{1, a, a^2, a^3, \dots\}$. هل يمكن ان تكون كل هذه العناصر مختلفة ؟

مسألة :

اكمل النظرية التالية وبرهنها.

نظرية :

تكون الحلقة $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ حقلاً اذا وفقط اذا كانت n ——— .

لقد لاحظنا في الزمرة $(\mathbb{Z}, +)$ ان للمعادلة $ax = b$ حلاً وحيداً هو $x = \frac{b}{a}$ في $\mathbb{Z}$ (البند ١,٣) . ولكن قد لا يكون للمعادلة $ax = b$ أي حل في الحلقة $\mathbb{Z}$. فمثلاً للمعادلة $2x = 1$ الحل الوحيد $x = \frac{1}{2}$ في $\mathbb{Z}$ ولكن ليس للمعادلة $2x = 1$ حل في $\mathbb{Z}$.

ومن جهة اخرى ، اذا كانت $a, b \in \mathbb{Z}$ و $a \neq 0$ فللمعادلة

$ax = b$ حل وحيد $x = \frac{b}{a}$ في $\mathbb{Q}$. سترى في المسألة التالية انه اذا كانت φ حقلاً يكون لكل معادلة خطية

$ax = b$ ، $a \neq 0$ ، $b \in \varphi$ حل في φ .

مسألة :

١. برهن انه اذا كانت $(\varphi, +, \cdot)$ حقلاً و $a, b \in \varphi$ بحيث $a \neq 0$.

فللمعادلة $ax = b$ حل وحيد القيمة $x = \frac{b}{a}$ في φ .

ب. برهن ان كل حلقة تبديلية ذات عنصر محايد تكون حقلاً اذا وفقط اذا كان لكل $a, b \in \varphi$ ، $a \neq 0$ حل $s \in \varphi$ للمعادلة $as = b$.

تعريف :

تكون المجموعة الجزئية φ من الحقل $(\varphi, +, \cdot)$ حقلاً جزئياً من φ اذا وفقط اذا كانت $(\varphi, +, \cdot)$ حقلاً .

مسألة :

عرفنا ان المجموعة الجزئية $\mathcal{C}$ من الحلقة $\mathcal{H}$ تكون حلقة جزئية اذا وفقط اذا كان لكل f ، $b \in \mathcal{C}$ كل من $f-b$ و ab في $\mathcal{C}$.

جد بالمقابل شرطاً لازماً وكافياً لان تصبح $\mathcal{C}$ حقلاً جزئياً من الحقل $\mathcal{H}$ و برهن صحة اجابتك.

لقد رأينا ان $\mathcal{C}$ حلقة غير تافهة $\mathcal{H}$ تحتوي على الاقل على المثاليتين $\{0\}$ ، $\mathcal{H}$. ويمكن ايضاً بيان ان بعض

الحلقات لا تكون حتى حلقات كاملة ليس لها مثاليات فعلية . (انظر التمرين ٣,٣ - ٩). وعدم وجود المثاليات هذا يسري بشكل عام على الحقول كما هو مبين في المسألة القادمة .

مسألة :

١. اثبت ان الحقل $\mathcal{H}$ ليس له مثاليات فعلاً .

ب. بين بمثال ان هناك حلقات كاملة تحتوي على مثاليات فعلية .

كثيراً من الطلبة المبتدئين يكتبون $(f+b)^n$ بالشكل $f^n + b^n$ حيث $f, b \in \mathcal{H}$ و $n \in \mathbb{Z}^+$

ونخبرهم دائماً ان هذه النتيجة ليست صحيحة . والآن سنبرهن انه اذا كان f و b عنصرين في $\mathcal{H}$ حيث d عدد اولي فالواقع ان

$$(f+b)^d = f^d + b^d .$$

ونبرهن ايضاً انه اذا كان d عدداً اولياً و $f \in \mathcal{H}$ ليست من مضاعفات d فان d تقسم كلا $f^d - f$ و $f^d - 1$

. (فمثلاً يعني هذا ان 12 تقسم $f^{12} - 1$ لكل $f \in \mathcal{H}$ - $\{0\}$).

مسألة :

لتوضيح هذه النتائج بنظرية الاعداد ، اختر عدداً اولياً معيناً $d < 13$.

واختَر عنصرين معينين $f, b \in \mathcal{H} - \{0\}$.

١. احسب $(f)^d$ و $(b)^d$ و $(f+b)^d$

ب. احسب $(f+b)^d$ و $(f)^d + (b)^d$

يمكن استخدام المسألة التالية في برهان النتائج السابقة بشكل عام.

مسألة :

١. اذا كان n عدداً صحيحاً حيث يكون $\mathcal{H}$ حقلاً فما هي رتبة زمرة الضرب $\mathcal{H}^* - \{0\}$ ؟

ب. ليكن n عدداً صحيحاً حيث $\mathcal{H}$ حقل ، ولتكن $f \in \mathcal{H}^* - \{0\}$

اثبت ان رتبة العنصر a^n في زمرة الضرب $Z_n - \{n\}$ تقسم العدد الصحيح $n - 1$.

مسألة : ٦٤

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن d عدداً اولياً .

١. فإذا كانت $Z_{d^2} - \{d\}$ فان $a^{d-1} = 1$ ، $a^d = 1$ ، $a^{d^2} = 1$.

ب. إذا كانت Z_{d^2} و a ليست من مضاعفات d فان $a^{d-1} = 1$ (مض d) ▲

ح. إذا كانت Z_{d^2} فان $a^d \equiv 1$ (مض d) .

تعرف النتائج في المسألة ٦٤ ب و ٦٤ بنظرية فيرمات الصغرى .

لقد كان فيرمات (١٦٠١ - ١٦٦٥) محامياً فرنسياً وكانت الرياضيات هوايته . ومع ذلك فقد انجز

بعض الإضافات القيمة لنظرية الاعداد وعدة فروع أخرى في الرياضيات .

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

ليكن d عدداً اولياً .

١. فإذا كانت a^d ، $b \in Z_d$ فان $(a + b)^d \equiv (a^d + b^d) \pmod{d}$ (مض d)

ب. وإذا كانت a^d ، $b \in Z_d$ فان

$$(a + b)^d = (a^d + b^d) \pmod{d}$$

مسألة :

اثبت ان 12 تقسم $s^{12} - 1$ حيث s عدد صحيح لا يساوي اياً من مضاعفات 12 .

ان مفهوم الحقل قدمه أبل في بحث نشره عام ١٨٢٩ . واستعمل جالوا بعد فترة وجيزة مفهوم الحقل

مع انه لا هو ولا أبل استعمالاً لهذا الاسم الذي تعرفه اليوم ولا تعامل مع اي شيء عدا الحقول مثل Q و R

ذات العناصر العددية . لقد فهم كلاهما الحقل بأنه مجموعة من الاعداد مغلقة بالنسبة للجمع ، والطرح

والضرب والقسمة ، على عناصر غير الصفر .

لقد كان اهتمام جالوا بحقول مثل $Q(\alpha) =$

$$Q(\alpha) = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha^i \right\} / \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} b_j \alpha^j \right\} : a_i, b_j \in Q$$

$$م، ن \in \mathbb{Z} \cup \{\cdot\} \text{ و } \sum_{i=1}^r b_i \alpha_i \neq 0$$

حيث تكون α عدداً حقيقياً.

يسمى مثل هذا الحقل الآن بالحقل الموسع.

كان ديدكند هو الذي ابتكر اسم الحقل وقد وضع مجموعة من الأوليات عن الحقول العددية ، وذلك عام ١٨٧١ وكان و بير (١٨٤٢ - ١٩١٣) هو الذي بدأ بدراسة الحقول المجردة في اواخر القرن التاسع عشر.

وقد قدم ، ضمن الاشياء الأخرى ، صيغة مجردة لانجازات جالوا في حل المعادلات الحدودية . وفي الواقع لقد اعتبرو بير الزمر والحقول المفهومين الرئيسيين في الجبر المجرد واعتبر الحقول امتداداً للزمر.

وأولياته التي بها عرف الحقل الجرد هي نفسها ما تقدم ذكره في التعريف ٥٢ اذا كتبنا تعريف الحلقة التبديلية . ولقد اشترطو بيز ان تكون وحيدة (وهذا شرط يمكن برهانه كما هو مبين في البند ١،٣). وفي نهاية القرن التاسع عشر كانت الحقول المعروفة هي حقول الاعداد النسبية ، والحقيقية والمركبة ، وحقول

الاعداد الجبرية مثل $\{2 + \sqrt{-5} : 2 : \mathbb{Q}\}$ ، وحقول الاقترانات النسبية بمتغير واحد أو اكثر (اي الاقترانات الناتجة عن قسمة حدوديات بمعاملات في حلقة معطاة من الاعداد).

تمارين :

١ - عين الحقول في المجموعات التالية . علل اجاباتك.

٢. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{2 + \sqrt{2} : 2 : \mathbb{Q}\}$ بالنسبة لعمليتي جمع الاعداد العادية وضربها . (انظر المسألة ٤٨ والتمرين ١،٢ - ٦).

ب. مجموعة الاعداد المركبة $C = \{(b, a) : (b, a) \in \mathbb{R}\}$

بالنسبة لعمليتي الجمع المعرفة بوضع $(b, a) + (d, c) = (b + d, a + c)$ و عملية الضرب

بالصيغة $(b, a) \cdot (d, c) = (bd - ac, ad + bc)$. (انظر التمرين ٣،٦ - ١١).

حـ $Z[s]$ الحلقة المكونة من الحدوديات على Z في s .

٢ - جد نظائر الضرب لعدة عناصر في Z .

٣ - في اي حقل Φ يمكن تعريف عملية قسمة بوضع $a/b = a \cdot b^{-1}$ حيث $a, b \in \Phi$ و $b \neq 0$.

٢. في Z احسب $\frac{24}{13}$.

ب. في Z احسب $\frac{11}{11}$.

ح. ليكن q حقلاً. برهن العبارات التالية :

$$\begin{aligned} \frac{p}{p} &= \frac{p}{p} & 1 &= \left(\frac{p}{p}\right) \cdot \left(\frac{p}{p}\right) \\ \frac{p}{p} &= \frac{p}{p} & \frac{p}{p} &= \frac{p}{p} + \frac{p}{p} \\ \frac{p}{p} &= \frac{p}{p} & \frac{p}{p} &= \frac{p}{p} \end{aligned}$$

٤. اعمل جدولين للجمع والضرب لحقل ذي اربعة عناصر. هل يمكن ان يكون هذا الحقل متشاكلاً مع $(Z, +, \cdot)$ (تأكد من تحقيق خاصية التوزيع).
٥. برهن انه اذا كان q حقلاً و q حلقة متشاكلة مع q تكون q حقلاً.
٦. ان احد الاسئلة الهامة في نظرية الاعداد هو التالي :
لتكن m, n موجبتين وان $n < m$. اذا قسمت $2^m - 2^n$ العدد $2^3 - 2^2$ فهل يكون صحيحاً ان $2^m - 2^n$ تقسم $2^m - 2^n$ س 2^n لكل $s \leq 2^n$ في هذا التمرين ندرس زوجين من قيم m, n .
١. بين ان $2^m - 2^n$ تقسم $2^m - 2^n$ س لكل عدد صحيح $s \leq 2^n$.
ب. بين ان $2^m - 2^n$ تقسم $2^m - 2^n$ س. ثم برهن ان $2^m - 2^n$ تقسم $2^m - 2^n$ س لكل عدد صحيح $s \leq 2^n$.
٧. ليكن q حقلاً منتهياً يزيد عدد عناصره عن عنصرين. بين ان حاصل جمع كل العناصر في q يساوي صفراً.
٨. ليكن q عنصراً في Z ليس مربعاً كاملاً اي ان $\sqrt{q} \notin Z$.
١. نعلم من البند ٣,٥ ان $\sqrt{q} \notin Z$.
$$q = [\sqrt{q}]^2 + 2b\sqrt{q} + 2b^2$$

تكون حلقة تبديلية ذات عنصر محايد. هل تكون $q = [\sqrt{q}]$ حقلاً؟
علل اجابتك.
ب. نعلم من التمرين ٣,٦ - ١٠ ان $Z = [\sqrt{q}]$ حلقة كاملة. فهل يكون

z [>] حقلًا؟ علل اجابتك .

٩. لتكن

$$E = \{ (1, 2, 3, 4) : R, R = (1, 2, 3, 4) \}$$

يكون عنصران من E متساويين اذا وفقط اذا كانت مركبتاهما متساويتين اي ان :

$$(1, 2, 3, 4) = (1, 2, 3, 4) \text{ اذا وفقط اذا كان } R = R \text{ لكل } R = 1, 2, 3, 4. \text{ نعرف}$$

حاصل جمع اي عنصرين في E بوضع

$$(1, 2, 3, 4) + (1, 2, 3, 4) = (1, 2, 3, 4)$$

حيث $R = R + R$ لكل $R = 1, 2, 3, 4$. ويعرف المضاعف العددي

$$\alpha (1, 2, 3, 4) \text{ حيث } R \alpha R \text{ بالصيغة}$$

$$\alpha (1, 2, 3, 4) = (1, 2, 3, 4)$$

$$\text{لتكن } 1 = (1, 0, 0, 0), 2 = (0, 1, 0, 0), 3 = (0, 0, 1, 0), 4 = (0, 0, 0, 1)$$

$$1 = (1, 0, 0, 0), 2 = (0, 1, 0, 0), 3 = (0, 0, 1, 0), 4 = (0, 0, 0, 1)$$

$$1 = (1, 0, 0, 0), 2 = (0, 1, 0, 0), 3 = (0, 0, 1, 0), 4 = (0, 0, 0, 1)$$

ب. بين ان كل عنصر في E يمكن كتابته بالصيغة

$$1 + 2 + 3 + 4$$

ح. بين ان (E, +) زمرة تبديلية .

١٠. لتكن E المجموعة المعرفة في التمرين ٩. عرف جدولا لضرب $1, 2, 3, 4$ وحسب الجدول ٣,١. واذا

كانت S $\{1, 2, 3, 4\}$

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	2	1
4	4	3	1	2

الجدول ٣,١

فعرف الضرب لـ S $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ بالصيغة:

$$S = 10 = (1 + 2 + 3 + 4) (S)$$

$$= \text{أ}^2 \text{ب} (\text{و} \cdot \text{س}) + \text{أ}^2 \text{ب} (\text{و} \cdot \text{س}) + \text{أ}^2 \text{ب} (\text{و} \cdot \text{س})$$

$$\text{وإذا كان سه} = \text{أ}^2 \text{و} + \text{أ}^2 \text{و} + \text{أ}^2 \text{و} + \text{أ}^2 \text{و}$$

$$\text{صه} = \text{ب}^2 \text{و} + \text{ب}^2 \text{و} + \text{ب}^2 \text{و} + \text{ب}^2 \text{و} \text{عناصرين في ع فعر ف حاصل ضربهما بالصيغة :}$$

$$\text{سه} \cdot \text{صه} = \text{سه} \cdot (\text{ب}^2 \text{و} + \text{ب}^2 \text{و} + \text{ب}^2 \text{و} + \text{ب}^2 \text{و})$$

$$= \text{سه} \cdot (\text{ب}^2 \text{و}) + \text{سه} \cdot (\text{ب}^2 \text{و}) + \text{سه} \cdot (\text{ب}^2 \text{و}) + \text{سه} \cdot (\text{ب}^2 \text{و})$$

فمثلا

$$(\text{و}^2 - \text{و}^3) (\text{و}^2 + \text{و}^4) = (\text{و}^2 - \text{و}^3) (\text{و}^2 + \text{و}^4) = (\text{و}^2 - \text{و}^3) (\text{و}^2 + \text{و}^4)$$

$$\text{ب. جد حاصل الضرب} (\text{و}^2 - \text{و}^3) (\text{و}^2 + \text{و}^4) = (\text{و}^2 - \text{و}^3) (\text{و}^2 + \text{و}^4)$$

$$(\text{و}^2 - \text{و}^3) (\text{و}^2 + \text{و}^4) = (\text{و}^2 - \text{و}^3) (\text{و}^2 + \text{و}^4)$$

$$\text{ح. برهن ان} \text{أ}^2 \text{و} + \text{أ}^2 \text{و} + \text{أ}^2 \text{و} = (\text{و}^2 - \text{و}^3) (\text{و}^2 + \text{و}^4) \text{ اذا فقط اذا كان}$$

$$\text{أ}^2 + \text{أ}^2 + \text{أ}^2 = 0$$

د. افترض ان الضرب المعرف اعلاه يكون عملية ثنائية معرفة تعريفاً حسناً وبحيث تكون تجميعية وتوزيعية على الجمع. برهن ان (ع، +، 0) تكون حلقة ذات عنصر محايد وان الضرب ليس تبديلياً على ع.

هـ. اثبت ان كل عنصر غير الصفر، من ع، له معكوس ضربي.

لا تحاول ان تحل المعادلة صه سه = و حيث صه ع ثابتة وبدلاً من ذلك استعمل

الجزء ب. تذكر ان عليك ان تبرهن ان النظرية عنصر في ع.

والمجموعة ع هي مثال على جبرية القسمة - حلقة ذات عنصر محايد وضرب عددي

حيث لكل عنصر مخالف للصفر نظير. ان أول من عرف هذه الحلقة هو هاملتون

(١٨٠٥ - ١٨٦٥) الذي سمى هذه الاعداد بالرباعيات. ويمكن تفسير المركبات

الاربعة بانها تحدد الموضع بدلالة الزوايا والمسافة وبالمثل فان الرباعيات لها تفسير

مفيد للفيزياء والهندسة.

١١*- وكما يوجد خوارزمية قسمة للحلقة الكاملة Z فكذلك يوجد خوارزمية قسمة للحلقة الكاملة

قه [س] المكونة من كل الحدوديات على حقل ق. ويمكن ذكر هذ على النحو التالي :

نظرية : لتكن ق حقل و هـ(س) ، د(س) ق [س] - {0}

فهناك حدوديتان ك(س) وب(س) في ق [س] حيث ان هـ(س) = د(س) ك(س) + ب(س)

$$\text{و ب (س)} = 0 \text{ أو در (ب (س)) } > \text{در (د (س))}.$$

فتسمى الحدودية ك(س) خارج القسمة ويسمى ب(س) الباقي عند قسمة هـ(س) على

د(س).

٢. لكل من الحدوديات هـ (س) و د (س) $\exists Z$ [س] ادناه جد خارج القسمة والباقي عند قسمة هـ (س) على د (س).

هـ (س)	د (س)
$س^٣ - س^٢ + ٣$	$س^٢ + ٤$
$٤س^٢ - ٥$	$٣س^٢$
$س^٥ + ١$	$س - ١$

ب. ليكن Q حقلاً ولتكن هـ (س) ، د (س) $\exists Q$ [س] - {٠}

فلبرهنة خوارزمية القسمة لتكن

$$صه = \{هـ (س) - د (س) ي (س) : ي (س) د (س) \neq 0\}$$

برهنة انه يوجد له (س) $\exists Q$ (س) بحيث يكون

$$ر (س) = هـ (س) - د (س) ك (س) .$$

صفرأ او ان درجتها هي الدنيا في كل حدوديات صه . ثم برهن بالتناقض ان

$$در (ر (س)) > در (د (س)) \text{ اذا كانت } ر (س) \neq 0$$

١٢. ليكن ن عدداً صحيحاً موجباً ثابتاً برهن ان العنصر $١ \in Z$ نظيراً ضربياً اذا وفقط اذا كان ٢ ون عددين اوليين نسبياً (أي ان القاسم المشترك الاعظم لـ ١ و ٢ ويرمز له بالرمز $ق.م.أ$ هو ١).

$$١٣. \text{ خذ زمرة الضرب } Z_{١٧} - \{١٧٠\} .$$

١. اكتب قائمة بالعناصر المختلفة في $\langle ١٧٤ \rangle = \{ (١٧٤)^{-1} : ر \in Z^+ \}$. وهي زمرة الضرب

الجزئية المتولدة عن العنصر ١٧٤ . ثم جد قيمة ن بحيث تكون $\langle ١٧٤ \rangle$ متشاكلة مع زمرة الجمع Z .

ب. اعد الجزء ١ للزمرة الجزئية $\langle ١٧٢ \rangle$.

عين العناصر في $\langle ١٧٣ \rangle$. هل تكون زمرة الضرب $Z_{١٧} - \{١٧\}$ زمرة دورية ؟

$$١٤. ١. \text{ في زمرة الضرب } Z_{١٣} - \{١٣٠\}$$

اكتب قائمة بالعناصر المختلفة للزمرة الجزئية $\langle ١٣٤ \rangle = \{ (١٣٤)^{-1} : ر \in Z^+ \}$

٣,٨ حقول الخوارج

ان المجموعة Z حلقة كاملة ولكن العنصرين ١ و -١ فقط لهما نظيران في Z . ولكن كل الخوارج $\frac{f}{g}$ حيث $g \neq 0$ ، $f \in Z$ ، $g \in Z$ توجد في الحقل Q الذي يحتوي على Z . ولهذا الحقل عملية جمع معرفة بالصيغة :

$$\frac{f}{g} + \frac{h}{k} = \frac{fk + gh}{gk}$$

وعملية الضرب المعرفة بالصيغة :

$$\frac{f}{g} \cdot \frac{h}{k} = \frac{fh}{gk}$$

والاحتياطات لازمة مع هذه العمليات لانه يمكن لعدد نسبي ان يكتب بطرق عديدة مختلفة ولكننا نعلم ان $\frac{f}{g} = \frac{h}{k}$ اذا وفقط اذا كان $af = bh$.
لنأخذ حلقة كاملة اختيارية K ونبين ، مستخدمين هذه الافكار كحافز ، انه «يمكن وضع K داخل» حقل بحيث يكون لكل عنصر غير الصفر نظير ضربي . يسمى حقل خوارج K .
لتكن K حلقة كاملة فالخطوة الأولى لبناء حقل الخوارج ناخذ
$$صهه = \{ (f, g) : f, g \in K, g \neq 0 \}$$

تعريف ٦٧ :

يكون الزوجان (f, g) و (h, k) من $صهه$ متكافئتين ، ويرمز لذلك بالرمز $(f, g) \sim (h, k)$ ، اذا وفقط اذا كان $af = bh$.

مسألة ٦٨ :

برهن ان العلاقة $\sim$ على $صهه$ المعطاة في التعريف ٦٧ هي علاقة تكافؤ على $صهه$. (انظر الملحق ٤).

قد لا نفترض في برهانك ان للعناصر غير الصفريية في $صهه$ نظائر ضرب او ان القسمة معرفة في $صهه$. تذكر ان الفكرة من هذا العمل هي انشاء نظائر ضرب لعناصر غير صفريية في K .

تعريف ٦٩ :

لتكن K حلقة كاملة . ولكل $(f, g) \in صهه$ لتكن

$$[f, g] = \{ (h, k) : (h, k) \in صهه \text{ و } (h, k) \sim (f, g) \}$$

فيكون $[١, ب]$ صف التكافؤ للعنصر $(١, ب)$ في صفه .

مسألة : ٧٠

لتكن $ل = Z$ في هذه المسألة فقط . برهن ان $[٣, ٢] = [٦, ٤]$. جد عدة ازواج من اعداد صحيحة $١, ب$ بحيث أن $[١, ب] = [٢, ٢]$. لتكن $ل$ حلقة كاملة و $١, ب, ٢$ ،
 $ب_١$ $\exists$ $ل$ بحيث $ب, ب_١ \neq$.

تذكر ان $[١, ب] = [١, ب_١]$ اذا وفقط اذا كان $(١, ب) \sim (١, ب_١)$.

مسألة : ٧١

اذا كانت $[١, ب] = [١, ب_١]$ ، جد علاقة بين $١, ب, ٢$ و $١, ب_١$ في $ل$.
لتكن $ل$ حلقة كاملة ولتكن

$\mathcal{C}(ل) = \{ [١, ب] : (١, ب) \in \text{صفه} \}$

فكل عنصر في $\mathcal{C}(ل)$ هو صف تكافؤ من الازواج المرتبة (الجائزة) لعناصر من $ل$.

مسألة : ٧٢

اكتب قائمة تحتوي على عدة عناصر من $\mathcal{C}(Z)$

هل $[٠, ٢]$ عنصر في $\mathcal{C}(Z)$ ؟

اذا اردنا ان تكون $\mathcal{C}(ل)$ حقلاً فعلينا تعريف عمليتي الجمع والضرب على $\mathcal{C}(ل)$.
ونستعمل العمليتين كدليل على الاعداد النسبية .

تعريف : ٧٣

يعرف الجمع $(+)$ على $\mathcal{C}(ل)$ بوضع

$$[١, ب] + [١, د] = [١, ب + د]$$

لكل $[١, ب], [١, د] \in \mathcal{C}(ل)$. ويعرف الضرب $(\cdot)$ بوضع

$$[١, ب] \cdot [١, د] = [١, ب \cdot د]$$

لكل $[١, ب], [١, د] \in \mathcal{C}(ل)$.

مسألة : ٧٤

في $\mathcal{C}(Z)$ احسب ناتج $[٣, ١] + [-٢, ٥]$ وحاصل الضرب $[٣, ١] \cdot [-٢, ٥]$.

مسألة : ٧٥

لتكن $ل$ حلقة كاملة . برهن انه اذا كانت $[١, ب] = [١, د]$ ،

$$[١, د] = [١, د_١] \text{ فان } [١, ب] \cdot [١, د_١] = [١, د] \cdot [١, د_١] = [١, د \cdot د_١]$$

$$\text{اي } [١, د \cdot د_١] = [١, د \cdot د_١]$$

تبين المسألة ٧٥ ان الضرب يكون عملية ثنائية معرفة تعريفاً حسناً على $\mathcal{C}(ل)$. وبالمثل
فالجمع يكون عملية ثنائية معرفة تعريفاً حسناً على $\mathcal{C}(ل)$. ويترك برهان هذه الحقيقة
للتمرين ٢ .

نظرية : ٧٦

لتكن ك حلقة كاملة فتكون المجموعة ج (ك) حقلاً بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب المعطاتين في التعريف ٧٣ وتسمى المجموعة ج (ك) بحقل خوارج ك . وفي المسألة التالية برهان جزئي للنظرية ٧٦.

مسألة : ٧٧

١. برهن ان ج (ك) ، + زمرة تبديلية.
- ب. جد العنصر المحايد للضرب في ج (ك) وعلل اختيارك.
- ج. بين انه اذا كانت [٢ ، ب] $\neq$ [(٠) ، ١] فللصف [٢ ، ب] نظير ضربي.
- يترك للتمرين ٣ برهان ان ج (ك) - { [١ ، ٠] } زمرة تبديلية بالنسبة للضرب ، اما برهان ان الضرب توزيعي على الجمع في ج (ل) فمتروك للتمرين ٤.

مسألة : ٧٨

لتكن ل حلقة كاملة

$$٢. \text{ برهن ان المجموعة } ل = \{ [١ ، ٢] : ٢ \in ل \}$$

هي حلقة جزئية من ج (ل) .

- ب. برهن ان ل تكون متشاكلة مع ل . لذلك عرف اقتراناً ϕ : ل - ل وبرهن ان ϕ تشاكل.
- ويستعمل الرمز ϕ غالباً لصف التكافؤ [٢ ، ب] حيث ٢ و ب عنصران في الحلقة الكاملة ل و ب $\neq$. وهذا يوافق الرمز المؤلف للاعداد النسبية .

تمارين :

- ١ - ٢. في ج (Z) اثبت ان [٢ ، ب] = [١ ، ب'] اذا كانت ب $\neq$.
- ب. اكتب قائمة بصفوف التكافؤ ، المختلفة في حقل خوارج Z . برهن ان هذا الحقل متشاكل مع Z ونفسها.
- ٢ - لتكن ل حلقة كاملة . برهن ان الجمع يكون عملية ثنائية معرّفاً تعريفاً حسناً على ج (ل)
- ٣ - لتكن ل حلقة كاملة . برهن ان ج (ل) - { [١ ، ٠] } يكون زمرة تبديلية بالنسبة للضرب.
- ٤ - لتكن ك حلقة كاملة . برهن أن الضرب يكون توزيعياً على الجمع في ج (ك)
- ٥ - لتكن ل حلقة كاملة ولتكن ق حقلاً يحتوي على ل . برهن انه يوجد حقل جزئي ق (من ق) حيث ق تحتوي على ل وتكون ق متشاكلة مع ج (ل) .
- ٦ - برهن ان المجموعة

$$له = \left\{ \frac{p}{q} : p \in Z \text{ و } q \in Z \neq 0 \right\}$$

- هي حلقة كاملة وجد حقلاً جزئياً من Q يكون متشاكلاً مع حقل الخوارج $\mathcal{C}$ (له) .
- ٧ - برهن ان Q ، حقل الاعداد النسبية ، يكون متشاكلاً مع $\mathcal{C}(Z)$ ، حقل الخوارج في Z .
 أولاً عليك تعريف تناظر $Q \leftarrow \mathcal{C}(Z)$ وبرهن انها تكون اقتراناً معرفاً تعريفاً حسناً وبعد ذلك عليك ان تبرهن ان هذا الاقتران تشاكل (حلي) . (أو استعمل التمرين ٥).
- ٨ - الحلقة Z_2 المكونة من الاعداد الصحيحة الزوجية لا تكون حلقة كاملة لانها لا تحتوي على عنصر محايد . ولكن ليس لهذه الحلقة قواسم صفرية . ونعلم ان Z_2 تكون محتواة في Q .
 في هذا التمرين ستكون حقل خوارج لحلقات مثل Z_2 ونثبت في الجزء د ان Q متشاكلة مع حقل خوارج Z_2 ومن ثم فهي اصغر حقل يحتوي على Z_2 .
- فبصورة عامة اذا كانت $\mathcal{C} \neq \{0\}$ حلقة تبديلية بدون قواسم صفرية فاننا نكون حقل خوارج للحلقة $\mathcal{C}$.

$$\text{لتكن } \mathcal{C} = \left\{ (p, q) : p \in \mathcal{C} \text{ و } q \in \mathcal{C} \neq 0 \right\}$$

للزوجين $(p, q), (r, s) \in \mathcal{C}$ عرف $(p, q) \sim (r, s)$ اذا وفقط اذا كان $ad = bc$.

١. اثبت ان العلاقة $\sim$ تكون علاقة تكافؤ على $\mathcal{C}$.

ب. ليكن $\frac{p}{q}$ صف التكافؤ للعنصر (p, q) :

$$\frac{p}{q} = \left\{ (r, s) : (r, s) \sim (p, q) \right\} \text{ و } (p, q) \sim (r, s) \text{ و } (r, s) \sim (p, q)$$

$$\left\{ \frac{p}{q} : (p, q) \in \mathcal{C} \right\} = \mathcal{C}$$

عرف جمعا (+) وضرباً (·) على $\mathcal{C}$ كما يلي :

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs}$$

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$$

برهن ان الجمع والضرب عمليتان ثنائيتان على $\mathcal{C}$ (ج) معرفتان تعريفاً حسناً .
 د. برهن ان $\mathcal{C}$ (ج) (ج) ، + ، · حقل . يمكنك استخدام اي من البراهين السابقة التي لا

تعتمد على وجود عنصر محايد في $\mathcal{H}$.

د. برهن ان $\mathcal{H}(Z^2)$ يكون متشاكلا مع حقل الاعداد النسبية Q تذكر ان التشاكل يجب ان يكون تشاكلا حلقيا.

٩. - ليكن $\mathcal{H}$ عنصراً في Z^+ بحيث لا يكون مربعاً كاملاً اي ان $\sqrt{\mathcal{H}} \notin Z$. من التمرين ٣,٦ - ١٠ نعلم ان

$$\{Z \ni b, p : \sqrt{\mathcal{H}} + b = p\} = [\sqrt{\mathcal{H}}] Z$$

هي حلقة كاملة . وبذا تستطيع ان تكون حقل الخوارج $\mathcal{H}([\sqrt{\mathcal{H}}] Z)$.

عرف : $\phi : \mathcal{H}([\sqrt{\mathcal{H}}] Z) \leftarrow Q$ بالصيغة

$$\phi([s, v]) = s v^{-1} \text{ لكل } [s, v] \in \mathcal{H}([\sqrt{\mathcal{H}}] Z) .$$

٢. برهن ان ϕ اقتران معرف تعريفاً حسناً بقيم في $Q[\sqrt{\mathcal{H}}]$.

ب. برهن ان ϕ تشاكل من $\mathcal{H}([\sqrt{\mathcal{H}}] Z)$ الى $Q[\sqrt{\mathcal{H}}]$.

ولهذا فاذا كانت $\mathcal{H} \in Z^+$ يكون حقل الخوارج للحلقة $Z[\sqrt{\mathcal{H}}]$ متشاكلا

مع حقل جزئي من R هو $Q[\sqrt{\mathcal{H}}]$

مراجعة

عبارات هامة

حلقة	حقل جزئي
حلقة ذات عنصر محايد	قاسم للصفر
حلقة تبديلية	طرح
حلقة جزئية	قسمة
حلقة جزئية فعلا	اقتران محافظ (حلقي)
مثالية يمنى	تشاكل (حلقي)
مثالية يسرى	حدودية في س على جـ
مثالية ذات جانبيين	حلقة الحدوديات على جـ
حلقة كاملة	درجة الحدودية
حقل	حقل الخوارج

الرموز

$(\phi, +, \cdot)$	(ϕ)
a^n, b^n	$\sum_{r=1}^n a_r s_r$
$a - b$	$Q[\alpha]$
$\frac{p}{q}$	$\phi[s]$
a^p, ϕ^p	$\phi(l)$
$\text{نو}(\phi)$	$[a, b] \ni \phi(l)$

أمثلة :

حلقات :	$Q, Z, R, M_R(R), Z, Z, Q, Z, Z$
حلقات كاملة :	$Q, \text{حيث } Z, R, Q, Z$

حَقُول :

في التمارين :

(ق) (س، ح)، (، +،)، (محا (س)، +،)، (، +، C)، (، +، ح)، (، +، [س₁، ...، س_n])

مسائل :

- ١ - ما هي الأوليات للحلقة ؟ للحلقة الكاملة ؟ للحقل ؟
- ٢ - اذكر أربع خصائص أولية للحلقة تنتج من خصائص الزمرة . اذكر عدة خصائص لحلقة تنتج عن وجود الضرب وقانون التوزيع.
- ٣ - اذا وجد عنصر محايد للضرب في حلقة فهل يكون وحيداً ؟ هل يمكن لعنصر في حلقة ان يكون له اكثر من نظير ضربى واحد ؟
- ٤ - صف كل الحلقات الجزئية وكل المثاليات في Z .
- ٥ - ما هو اقل شرط ضروري وكاف لكي تكون اى مجموعة جزئية من الحلقة حلقة جزئية ؟ ما هو المعيار المقابل لمجموعة جزئية من الحقل حتى تكون حقلاً جزئياً ؟
- ٦ - لتكن G حلقة و H G فهل تكون المجموعة H مثالية يمنى ام مثالية يسرى في G ؟ فهل تكون المجموعة H مثالية يسرى ام مثالية يمنى في G ؟
- ٧ - ليكن ϕ اقتراًناً محافظاً من حلقة G لحلقة H . هل تكون نواة ϕ حلقة جزئية من G ؟ هل تكون مثالية في G ؟ هل تكون مجموعة الصورة $\phi(H)$ (G) حلقة جزئية من G ؟ هل تكون $\phi(H)$ مثالية في G ؟
- ٨ - هل يلزم ان تكون درجة حاصل ضرب q (س) د(س) لحدوديتين على حلقة G هي حاصل الجمع لدرجتي q (س) و د (س) ؟ ما اكبر درجة يمكن ان تكون لحاصل الجمع q (س) د(س) ؟

- ٩ - ما الفارق الاساسي بين الحلقتين $Q[27]$ و $Q[33]$ ؟
- ١٠ - ما الشرط الذي تضعه على قواسم الصفر في الحلقة ليتكافأ مع الاختزال للضرب ؟ هل يمكن لحلقة كاملة ان يكون لها قواسم صفرية ؟
- ١١ - مع اي قيم n تكون Z_n حلقة كاملة ؟ حقلا ؟
- ١٢ - ما الشرط الذي يكفي للتأكد من ان حلقة كاملة تكون حقلا ؟
- ١٣ - اكتب قائمة بكل المثاليات لحقل ما .

١٤ - لتكن (ج ، + ، ٠) حلقة . ماذا يجب ان يتحقق في (ج - {٠} ، ٠) اذا كان ج- حقلا ؟

اذا كانت ج- حلقة تبديلية ذات عنصر محايد وكانت كل معادلة بالصيغة

أس = ب حيث ٢ ، ب ج و ٢ ≠ ٠

لها حل س ج فماذا يمكن ان يقال عن ج- فوق ما تقدم ؟

١٥ - اعط مثالا لحلقة ليست حلقة كاملة ولحلقة كاملة ليست حقلا .

١٦ - صف بناء حقل الخوارج من حلقة كاملة .

لقد اجيب على الاسئلة التالية في التمارين.

١٧ - اذا كانت ج و ج- حلقتين وكان ϕ : ج ← ج- اقتراناً محافظاً فصحيح غالباً ان خصائص ج- تنتقل الى ج- .

مع اي من الخصائص التالية يكون هذا صحيحاً بصورة عامة ؟

مع ايها تكون صحيحاً اذا كانت ϕ شاملة ؟ مع ايها تكون صحيحاً اذا كانت ϕ تشاكلا .

٢. ج- حلقة تبديلية.

ب. ج- حلقة ذات عنصر محايد.

ج. ج- حلقة كاملة.

د. ج- حقل.

هـ. ج- تحتوي على مثالية صم فعلية ذات جانبيين.

١٨ - ليكن ϕ اقتراناً محافظاً وشاملاً من حلقة ج الى حلقة ج- . فاذا كانت صم ϕ ج- مثالية فهل

تكون ϕ (صم) مثالية في ج- ؟ اذا كانت صم مثالية في ج- فهل تكون ϕ^{-1} (صم) مثالية في ج- ؟

١٩ - اعط مثالا لحلقة ليست حقلا ولا تحتوي على اي مثالية فعلية .

٢٠ - مع اي نوع من الحلقات ج- يكون صحيحاً ان

در (ق) (س) . در (س) = در (ق) (س) + در (د) (س) .

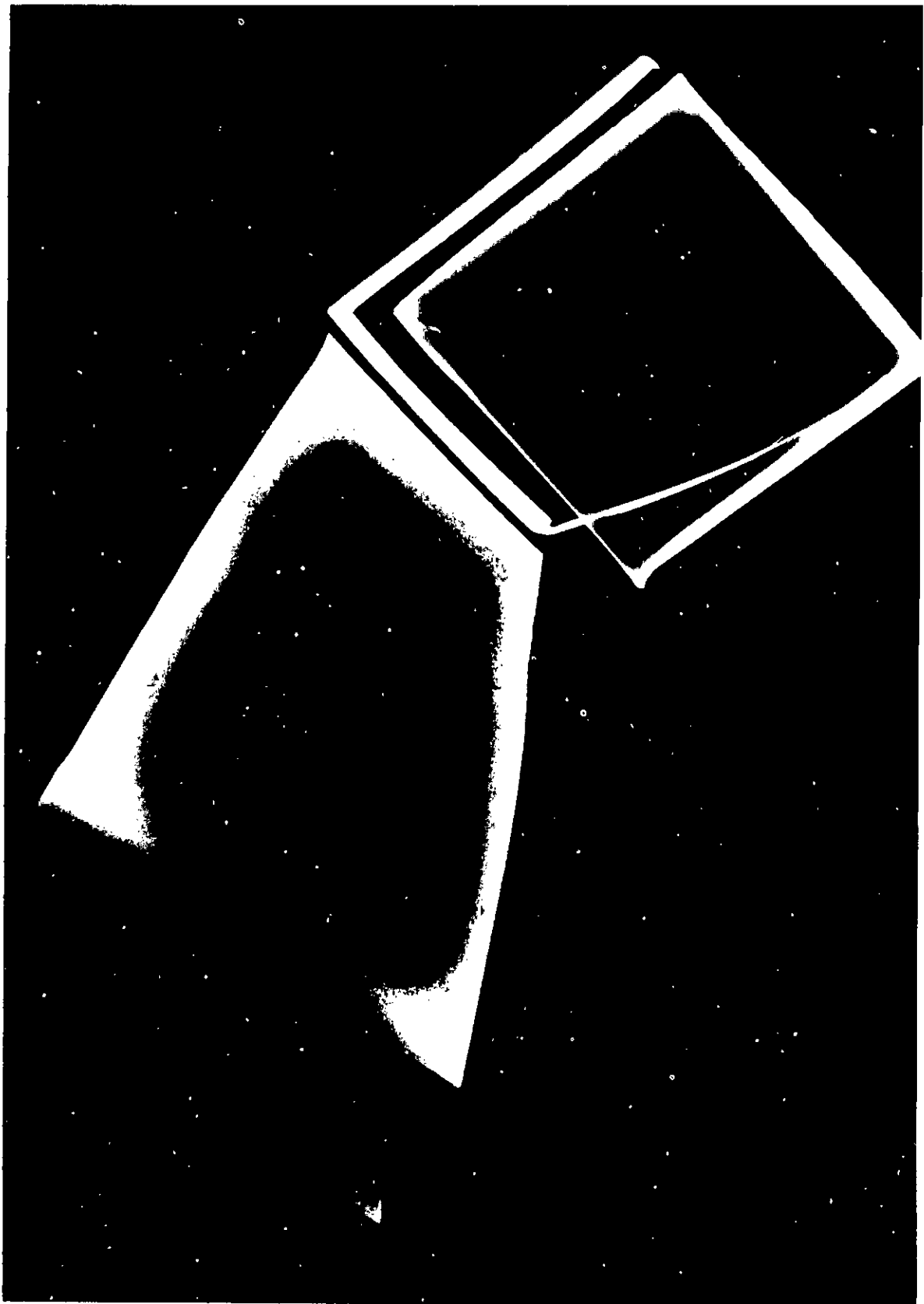
لكل الحدوديات اللاصغرية ق (س) ، د (س) $\in$ ج [س] ؟

مع اي نوع من الحلقات ج- من الضروري ان تكون ج [س] حلقة كاملة ؟ هل يمكن ان

يكون ج- [س] حقلا ؟

٢١ - اذا كانت الحلقة الكاملة له محتواة في حقل ق فصف حقلا جزئياً من ق يكون متشاكلا مع

حقل الخوارج ج (له).



فصل ٤

نظرية الزمرة ٢

تدرس في هذا الفصل ثلاثة مواضيع خاصة من نظرية الزمر . سنبحث في زمر جزئية خاصة من الزمرة مكونة من كل تبديلات المجموعة $\{1, 2, \dots, n\}$. وقبل اثبات وجود هذه الزمر الجزئية تدرس تبديلات خاصة تسمى دورات ونقلات . ونبين ان كل تبديلة يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب دورات او كحاصل ضرب نقلات . وفي البند ٤,٣ سندرس مجموعة جزئية من مجموعة كل التبديلات للزمرة S_n ، ونبين ان هذه المجموعات الجزئية المكونة من كل التشاكلات من S_n الى نفسها تكون زمرة بالنسبة للتركيب . وفي البند ٤,٤ نعطي طريقة لبناء زمرة بتعريف عملية على الضرب الديكارتي لزمرتين معلومتين . واخيراً نفحص زمراً يمكن تمثيلها «كضرب داخلي» مقارنة لزمرتين جزئيتين فعلاً .

٤,١ الدورات والنقلات في زمرة التبديلات

لقد قدمنا في البند ١,٥ زمرة S_n التماثل n المكونة من كل تبديلات المجموعة $\{1, 2, \dots, n\}$. وقد عبرنا عن (اي كل اقترانات الواحد لواحد الشاملة التي تقرن هذه المجموعة بنفسها) . وقد عبرنا عن

العنصر q للزمرة S_n برمز السطرين التالي :

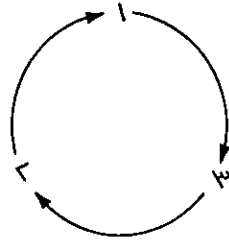
$$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1' & 2' & \dots & n' \end{pmatrix}$$

حيث $q = (r) = (r, r', r, r' = 1, 2, \dots, n)$ ونبين في هذا البند ان كل تبديلة في S_n يمكن كتابتها على شكل تركيب لتبديلات خاصة معينة تسمى دورات أو حتى تبديلات أبسط تسمى نقلات.

كل عنصر في S_n يكون مثلاً على دورة . فمثلاً اذا كانت q التبديلة

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

فنجعل على ان $q(1) = 2$ ، $q(2) = 1$ ، $q(3) = 3$. ويمكن تصوير هذه التبديلة q بدوران دائري للرموز 1 ، 2 ، 3 كما هو مبين في الشكل ٤,١ .



الشكل ٤,١

ان هذه التبديلة q التي تأخذ 1 الى 2 و 2 الى 3 و 3 الى 1 تكتب بالرمز المختزل $q = (1 \ 2 \ 3)$. وبهذا ذي الصف الواحد فان صورة كل عنصر هي العنصر الذي يليه الى يساره ما عدا صورة آخر عنصر فتكون العنصر الاول في الصف وبهذا فان $(1 \ 2 \ 3)$ هي ايضاً رمزاً للتبديلة

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

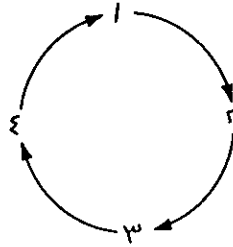
وهكذا فان التبديلة لا يكون لها تمثيل وحيد بدلالة الرمز بصف واحد. وبصورة عامة فان العنصر الذي يقرن بنفسه بالتبديلة يحذف من رمز الصف الواحد. وبهذا ففي S_n فان رمز الصف الواحد (1) يعني التبديلة.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

واذا اقترن كل عنصر بنفسه في تبديلة فتكتب التبديلة على النحو (١) أو (٢) أو (٣)

مسألة :

اكتب كل تبديلة في S_n برمز الصف الواحد .
توجد دورات في كل من الزمر S_n ($n \geq 2$) . فمثلا لتكن $q \in S_n$ حيث $q = (1) = 1$ ، $q = (2) = 2$ ، $q = (3) = 3$ ، $q = (4) = 4$. فبرمز الصف الواحد فان $q = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$ وتكون q دورة . ويمكن تصوير التبديلة q بدورة دائرية للرموز ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ كما هو مبين في الشكل ٤،٢



الشكل ٤،٢

لاحظ انه توجد عدة طرق لكتابة الدورة نفسها برمز الصف الواحد. فمثلا كتابة الدورة (١ ٢ ٣ ٤) بالصيغ (١ ٤ ٣ ٢) ، (٢ ٣ ٤ ١) أو (٤ ١ ٢ ٣) . وهذه كلها ترمز الى نفس التبديلة وهي

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

مسألة :

اعط مثالا لدورة في S_n وصورها بدورة دائرية لرموزها . لنعرف الآن رسمياً مصطلح «الدورة»

تعريف :

تكون التبديلة $q \in S_n$ دورة طولها r اذا وفقط اذا وجدت مجموعة جزئية $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ من $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ بحيث أن $q(a_1) = a_2$ ، $q(a_2) = a_3$ ، ... ، $q(a_{r-1}) = a_r$ ، $q(a_r) = a_1$

$$q = (a_1 a_2 \dots a_r)$$

وبحيث ان $q(y) = \{1, 2, \dots, n\} - \{1, 2, \dots, m\}$ لكل $y \in \{1, 2, \dots, n\}$.

وتكتب الدورة q بالصيغة $(1, 2, \dots, m, 1)$ برمز الصف الواحد وحذفت الأرقام التي تقترن بنفسها من الصيغة.

لاحظ انه حسب التعريف اذا كانت q دورة طولها واحد فان q تقترن عنصراً ما 1 بنفسه و $q(1) = 1$ لكل $r \in \{1, 2, \dots, n\}$. وبهذا فان كل دورة طولها 1 تقترن كل عنصر بنفسه. ويرمز لمثل هذه الدورة بالرمز (1) أو (2) أو (r) لكل $r = 1, 2, \dots, n$. وتبديلية العنصر المحايد هي التبديلة الوحيدة التي طولها واحد.

نقول أحياناً ان الدورة $(1, 2, \dots, m, 1)$ ذات الطول $r \leq 2$ تحرك العناصر التي عددها r في $\{1, 2, \dots, m\}$ ونترك العناصر التي في المجموعة $\{1, 2, \dots, n\} - \{1, 2, \dots, m\}$ ثابتة. واذا كانت $r = 1$ فان كل عنصر من $\{1, 2, \dots, n\}$ يبقى ثابتاً.

مسألة :

اكتب كل من الدورات التالية بصيغة الصف الواحد وجد طول كل دورة.

أ. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

ب. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

ج. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

د. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

مسألة :

في S_5 لتكن $Q = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)$ و $P = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)$

تذكر انه عند حساب مركبة لتبديلتين فيجب ان تبدأ بالتبديلة اليسرى ولهذا فان $(Q \ 5 \ D) = (1)$

$$= (Q \ D \ 1) = (Q \ 2) = 3, \quad Q \ 5 \ D = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)$$

واحسب الآن $(Q \ 5 \ D) = (3)$ واكمل الدورة .

ب. احسب $D \ 5 \ Q$. هل تكون $Q \ 5 \ D = D \ 5 \ Q$ ؟

وليست كل التبديلات دورات . فمثلا التبديلة

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ليست دورة . (لماذا ؟)}$$

ولكن يمكن كتابتها بالتركيب :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

او بالتركيب $D = (1 \ 2) \circ (3 \ 4)$ ، بصيغة الصف الواحد

مسألة :

١. في S_6 عبر عن التركيب

$$(1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6) \circ (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6)$$

في صيغة الصفين :

$$(1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6) \circ (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6) = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6)$$

تذكر ان الدورة $(1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6)$ تترك ٤ ، ٥ ، ٦ ثابت .

ب. بين أن الاقتران المركب :

$$(1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6) \circ (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6)$$

كتركيب من الدورتين $(1 \ 2)$ و $(3 \ 4)$.

ج. احسب $(1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6) \circ (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6)$ بصيغة الصفين .

هل هذا الاقتران المركب يساوي التركيب في الجزء ١ ؟

مسألة :

هل من الضروري ان يكون التركيب لدورتين دورة ؟ علل اجابتك .

تعريف :

تكون الدورتان $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ و $(b_1, b_2, \dots, b_m)$

منفصلتين اذا وفقط اذا كانت المجموعتان $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ و $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$

منفصلتين :

$$\emptyset = \{a_1, a_2, \dots, a_r\} \cap \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$$

وبهذا فان اي دورتين تكونان منفصلتين اذا وفقط اذا كانت العناصر التي تحركها احداها تبقى ثابتة في الأخرى .

لاحظنا عدة امثلة من التركيبات لدورات منفصلة واخرى غير منفصلة . لنبحث في هذه التركيبات ونعين متى يمكن ابدال الدورات.

مسألة :

١. عبر عن تركيب الاقترايين $(1 \ 3) \ 5$ و $(2 \ 4) \ 5$ و $(1 \ 3) \ 5$

بدلالة صيغة الصفين . هل هما متساويان ؟

ب. لتكن $q = (1 \ 2 \ 5)$ و $r = (3 \ 4)$.

هل تكون $q \circ r = r \circ q$ ؟

ج. ناقشنا في المسألة ٥ الدورتين $q = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)$

و $r = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)$ فهل تكون $q \circ r = r \circ q$ ؟

في المسألة ٦ اعتبرنا الدورتين $q = (1 \ 3 \ 5 \ 6)$ و

$r = (2 \ 6 \ 1)$. فهل تكون $q \circ r = r \circ q$ لهاتين الدورتين ؟

د. لاحظنا امثلة على تراكيب من دورات منفصلة واخرى غير منفصلة.

اي العبارات التالية تعتقد انها صحيحة ؟ اذا لم تكن $q \circ r$ دورتين منفصلتين في S_n

فان $q \circ r = r \circ q$

اذا كانت $q \circ r$ دورتين منفصلتين في S_n فان $q \circ r = r \circ q$.

برهن اجابتك بفرض ان $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ و $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ دورتان ————— في S_n

وبرهن تبادلهما :

$$(a_1, a_2, \dots, a_r) \circ (b_1, b_2, \dots, b_m) = (b_1, b_2, \dots, b_m) \circ (a_1, a_2, \dots, a_r)$$

$$(b_1, b_2, \dots, b_m) \circ (a_1, a_2, \dots, a_r) = (a_1, a_2, \dots, a_r) \circ (b_1, b_2, \dots, b_m)$$

لاحظنا ان كل عنصر في S_n هو دورة . وليس هذا صحيحاً في S_n اذا كانت $n < 3$. و

نبرهن فيما يلي انه يمكن التعبير عن كل تبديلة كتركيب من دورات منفصلة . وقبل برهان هذه النظرية لننظر في عدة امثلة من تبديلات لا تكون دورات ونرى كيف يمكن التعبير عنها كتركيب من زوج من الدورات المنفصلة.

مسألة :

عبر عن كل من التبديلات التالية كتركيب من اثنين او اكثر من الدورات المنفصلة ازواجاً

$$٢. \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ & ٥ \\ ٤ & ٥ & ٢ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$$

$$ب. \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ & ٥ & ٦ \\ ٥ & ٦ & ٢ & ١ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$$

$$ح. \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ & ٥ & ٦ \\ ٤ & ١ & ٣ & ٢ & ٦ & ٥ \end{pmatrix}$$

$$د. \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ & ٥ & ٦ & ٧ \\ ٥ & ٢ & ٧ & ٣ & ١ & ٦ & ٤ \end{pmatrix}$$

مسألة :

لتكن

$$\begin{pmatrix} ١ & ٢ & \dots & ن \\ ١٢ & ٢ & \dots & ن٢ \end{pmatrix}$$

تبديلة في S_n . استعمل المسألة ١٠ كدليل ، وبين طريقة «لتحليل» هذه التبديلة الى دورات (اي ايجاد دورات منفصلة ازواجاً يعطي تركيبها التبديلة الاصلية) .
وبالمسألة ١١ نكون قد برهنا اول عبارة من النظرية التالية :
اما برهان الجزء الثاني من العبارة بخصوص وحدانية التركيب فيترك للتمرين ٨.

نظرية :

يمكن التعبير عن أي تبديلة كدورة منفردة أو تركيب دورات منفصلة أزواجاً. وهذا التركيب وحيداً فيما عدا ترتيب العوامل واعتبار الدورات التي طولها ١.

ان دورة (٢ ب) ذات الطول اثنين تنقل عنصرين من المجموعة ١ ، ٢ ، ... ، ن وتترك

ن - ٢ من العناصر (العناصر المتبقية) ثابتة . ولهذا السبب فان الدورة ذات الطول اثنين اعطيت اسماً خاصاً .

تعريف :

تسمى كل دورة طولها اثنان نقلة .
لاحظ ان اي نقلة يمكن كتابتها بالصيغة $(\text{ }^f\text{ }^b)$ حيث $f > b$ لأن $(\text{ }^f\text{ }^b) = (\text{ }^b\text{ }^f)$.

مسألة :

٢. بين ان الدورة (١ ٢ ٣) يمكن كتابتها كترتيب نقلتين بالشكل :

$$\cdot (2 \quad 1) \circ (3 \quad 1)$$

ب. عبر عن الدورة (١ ٢ ٣ ٤) كتركيب نقلات .

ح - عبر عن الدورة (١ ٢ ٣ ٤ ٥) كتركيب نقلات .

د. عبر عن دورة اختيارية (١، ٢، ٣، ٤) كتركيب نقلات.

مسألة :

اثبت النظرية التالية :

نظرية :

يمكن التعبير عن أي تبديلة كتركيب نقلات .

لاحظ من الامثلة في المسألة ١٤ انه ليس من الضروري لهذه النقلات ان تكون منفصلة .

مسألة :

عبر عن كل من التبديلات التالية كتركيب نقلات .

(۲ ۳ ۱) .۲

ب. (۱ ۳ ۵ ۶)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$د. \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

تبين النظرية ١٥ ان النقلات في زمرة التماثل S_n هي اللبنات الاساسية في بناء الزمرة . ولكي نجد كل العناصر في الزمرة نجد ان $\frac{n(n-1)}{2}$ من النقلات في الزمرة ونكون تركيبات هذه النقلات . وهذا يسهل نظرياً ولكنه اصعب في التطبيق اذا كانت n كبيرة .

تمارين :

١ - عبر عن كل من التبديلات التالية كتركيب دورات منفصلة .

$$٢. \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 8 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$ب. \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & 1 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

٢ - عبر عن كل من التبديلات التالية كتركيب من دورات منفصلة.

$$٢. (5 \ 4 \ 3) \circ (4 \ 2 \ 3 \ 1)$$

$$ب. (3 \ 5 \ 1) \circ (2 \ 6 \ 3) \circ (3 \ 6 \ 4)$$

$$ج. (8 \ 5 \ 6 \ 1) \circ (2 \ 4 \ 3) \circ (2 \ 6 \ 8 \ 7)$$

٣ - عبر عن كل تبديلة في التمرين ١ كتركيب من نقلات.

٤ - عبر عن كل تبديلة في التمرين ٢ كتركيب من نقلات .

٥ - اعمل قائمة بكل العناصر في S_5 . ابدأ بكتابة قائمة بكل الدورات التي طولها اثنان ، ثلاثة ، اربعة .

٦ - ٩. جد نظير النقلة (٩ ب)

ب. بين ان تحليل التبديلة الى نقلات ليس وحيداً.

٧ - جد نظير الدورة (١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥)

٨ - برهن ان تحليل التبديلة التي ليست دورة بشكل تركيب من دورات منفصلة ازواجاً وحيد فيما عدا ترتيب العوامل والاشتمال على الدورات التي طولها واحد .

٩ - تذكر ان رتبة العنصر $q(S)$ هي اصغر عدد صحيح موجب م حيث ان q يساوي لتبديلة العنصر المحايد في S (انظر البند ٢,٢).

جد رتبة كل من التبديلات التالية :

$$(2 \quad 2 \quad 1) \quad .1$$

ب. (۱ ۲ ۳ ۴)

١٠. اكمل العبارة التالية ثم برهن النظرية :

نظرة :

الدورة (٢، ٤، ...، ٨) ذات الطول ر في S رتبته

١١. لتكن $Q = \alpha \circ \beta$ حيث α, β دورتان منفصلتان وفي هذه الحالة يكون $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$. وهكذا فإن $Q^2 = (\alpha \circ \beta)^2 = \alpha^2 \circ \beta^2$ (لماذا؟) اثبت ان $Q^2 = \alpha^2 \circ \beta^2$ وان $Q^2 = \alpha^2 \circ \beta^2$ لكل عدد صحيح موجب m .

١٢. استخدم النتائج في التمرين ١٠ و ١١ لإيجاد رتبة كل من التبديلات التالية :

$$(1 \ 7 \ 7 \ 0) \ 0 \ (2 \ 1 \ 2) \ .f$$

ب. (۲ ۱ ۴) ۵ (۳ ۲ ۵)

$$(7 \quad v \quad 0 \quad 3) \quad 0 \quad (1 \quad 2 \quad 2) \rightarrow$$
$$(7 \ 7 \ 10 \ 9 \ 7 \ 0) \ 0 \ (8 \ 3 \ 2 \ 1) \dots$$

(١٠ ٨ ٩ ٧ ٥) ٥ (٤ ٣) ٥ (٦ ٢ ١) هـ

١٣. استخدم النتائج في التمارين ١٠ ، ١١ ، ١٢ لإكمال العبارات التالية ثم برهن النظرية:

نظرية :

رتبة التبديلة يساوي ————— رتب الدورات المنفصلة التي تركيبها هو

هذه التبديلة.

١٤ - اكمل العبارة التالية بوضع شرط على r ثم برهن العرضية :

إذا كانت $q_r = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ دورة طولها

$r < 2$ وكانت r ————— تكون q_r دورة q_r دورة . ●

٤,٢ التبديلات الزوجية والفردية

سنواصل في هذا البند دراسة زمر التبديلات S_n حيث $n = 2, 3, 4, \dots$ لقد تجنبنا حتى الآن مسألة الزمر الجزئية من S_n عدا القيم الصغيرة $n = 3$ و $n = 4$ (ونظرية كالي) . ولكن بمساعدة الدورات وحدودية خاصة يمكننا بيان ان S_n تتكون من مجموعتين منفصلتين من التبديلات وهي التبديلات « الزوجية » و « الفردية » .
ونبرهن ايضاً ان مجموعة كل التبديلات الزوجية تكون زمرة جزئية من S_n . ولحل بعض الصعوبات الفنية ندرس اولاً حدودية خاصة ذات n من المتغيرات . وستساعدنا هذه الحدودية في التمييز بين تبديلة تنقل عدداً زوجياً من ازواج العناصر في المجموعة $\{1, 2, \dots, n\}$ وبين اخرى تنقل عدداً فردياً من الازواج .

تعريف :

لتكن $n \leq 2$ عدداً صحيحاً ثابتاً ، عرف حدودية $q_n(n)$ عواملها اعداد صحيحة في n من المتغيرات المختلفة $s_1, s_2, \dots, s_n$ بوضع $q_n(n) = (s_1 - s_2)(s_2 - s_3) \dots (s_{n-1} - s_n)$ حيث يرمز $\prod_{i=1}^n$ للضرب.

مسألة :

اكتب العوامل $q_n^{(2)}$ و $q_n^{(4)}$

$$q_n^{(2)} = (s_1 - s_2)(s_2 - s_3) \dots (s_{n-1} - s_n) \\ q_n^{(4)} = \dots$$

تعريف :

ليكن $n \leq 2$ عدداً صحيحاً موجباً ثابتاً ولتكن $\theta \in S_n$ وبذا فان θ تكون تبديلية للمجموعة

$$\{1, 2, \dots, n\}.$$

ونعرف حدودية تقابل θ بوضع

$$q_n(\theta) = \prod_{i=1}^n (s_{\theta(i)} - s_i) = (s_{\theta(1)} - s_1) \dots (s_{\theta(n)} - s_n)$$

فلنقارن $Q^{(n)}$ مع $Q^{(n)}$: لايجاد العوامل في $Q^{(n)}$ ، فبكل بساطة نبدل كل عامل (سر - سر) في $Q^{(n)}$ بالعامل (سهر - سهر) وبذا فان $Q^{(n)}$ تصبح حدودية في n من المتغيرات $s_1, \dots, s_n$ ولكن مع تبديل الارقام السفلى بالتبديلة θ .

$$\text{لتكن } n = 3 \text{ ولتكن } \theta = (1 \ 2) \text{ فان} \\ Q^{(3)} = (s_1 - s_2)(s_2 - s_3)(s_3 - s_1) = (s_1 - s_2)(s_2 - s_3) - Q^{(3)}.$$

مسألة :

لتكن $n = 3$ فلكل تبديلة $\theta \in S_3$ احسب $Q^{(3)}$ وجد علاقة بين $Q^{(2)}$ و $Q^{(3)}$. احتفظ بهذه النتائج لاستعمالها فيما بعد .

مسألة :

ليكن $n \leq 2$ عدداً صحيحاً ثابتاً . اثبت انه لكل $\theta \in S_n$ نحصل على $Q^{(n)} = Q^{(n)}$ أو $Q^{(n)} = -Q^{(n)}$.

تعريف :

ليكن $n \leq 2$ عدداً صحيحاً ثابتاً . تكون التبديلة $\theta \in S_n$ تبديلية زوجية اذا وفقط اذا كان $Q^{(n)}$ = $Q^{(n)}$ وتكون تبديلية فردية اذا وفقط اذا كان $Q^{(n)} = -Q^{(n)}$. نستعمل الرمز A_n للمجموعة المكونة من كل التبديلات الزوجية في S_n :

$$A_n = \left\{ \theta : \theta \in S_n , Q^{(n)} = Q^{(n)} \right\}$$

وتبين المسألة ٢١ ان كل عنصر من S_n اما ان يكون تبديلة زوجية او تبديلة فردية . وبما ان A_n تكون المجموعة المكونة من التبديلات الزوجية فان $A_n - A_n$ تكون المجموعة المكونة من كل التبديلات الفردية

مسألة :

لتكن $n = 3$ عين المجموعة A_n المكونة من كل التبديلات الزوجية في S_n والمجموعة $A_n - A_n$ المكونة من كل التبديلات الفردية في S_n .

ب. هل المجموعة المكونة من التبديلات الفردية زمرة جزئية من S_n ؟

جـ ما العلاقة بين الرتبة في A_n والرتبة في S_n ؟

ما دليل A_n في S_n ؟

مسألة :

هل تكون التبديلة المحايدة زوجية ام فردية في S_n ؟ وضح .

مسألة :

برهن التمهيدية التالية :

تمهيدية :

ليكن $n \leq 2$ عدداً صحيحاً ثابتاً . فكل نقلة $(a \ b)$ حيث $a > b$ في S_n هي تبديلة ————— ▲

إذا كانت α ، $\beta \in S_n$ فإن $\alpha \circ \beta \in S_n$ ولحساب $q_{\alpha \circ \beta}^{(n)}$

$$\text{لاحظ ان } q_{\alpha \circ \beta}^{(n)} = \prod_{i=1}^n (s_i - s_{i+1}) = \prod_{i=1}^n (s_i - s_{i+1}) = \prod_{i=1}^n (s_i - s_{i+1})$$

$$= \prod_{i=1}^n (s_i - s_{i+1}) = \prod_{i=1}^n (s_i - s_{i+1}) = \prod_{i=1}^n (s_i - s_{i+1})$$

ولذا فلكي نحسب $q_{\alpha \circ \beta}^{(n)}$ نطبق اولا التبديلة β على $q_{\alpha}^{(n)}$ لنحصل على

$$q_{\beta \circ \alpha}^{(n)} = q_{\alpha}^{(n)} \text{ أو } q_{\beta \circ \alpha}^{(n)} = q_{\alpha}^{(n)}$$

ونطبق على هذه النتيجة التبديلية α . اذا شئت فحاول هذا مع تبديلية في S_3 أو S_4 .

مسألة :

ليكن $n \leq 2$ عدداً صحيحاً ثابتاً . و α ، $\beta \in S_n$. ففي كل من الحالات في الجدول ٤,١ عين

هل $\alpha \circ \beta$ تبديلية زوجية ام فردية.

$\alpha \circ \beta$	β	α
	زوجي	زوجي
	فردى	زوجي
	زوجي	فردى
	فردى	فردى

الجدول ٤,١

تذكر النظرية ١٥ أنه يمكن التعبير عن كل تبديلة كتركيب من نقلات . فمثلا :

$$(1 \ 2 \ 3) \circ (1 \ 2) = (1 \ 2 \ 3)$$

$$(1 \ 2 \ 3 \ 4) \circ (1 \ 3) \circ (1 \ 4) = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$$

ويعطينا هذا وسيلة ملائمة لمعرفة التبديلات الزوجية والفردية .

مسألة : ٢٧

برهن الفرضيات التالية : لتكن $n \leq 2$ ، ولتكن $\theta \in S$ ، فإذا امكن التعبير عن θ بطريقة واحدة على الاقل كتركيب من عدد زوجي من النقلات فتكون θ تبديلة . وإذا امكن التعبير عن θ بطريقة واحدة على الاقل كتركيب من عدد فردي من النقلات فان θ تكون تبديلة .

والنتيجة الفورية لفرضيات المسألة ٢٧ هي النظرية التالية :

نظرية :

لتكن $n \leq 2$. فالتبديلة $\theta \in S$ تكون تبديلة زوجية اذا وفقط اذا امكن التعبير عنها بطريقة واحدة على الاقل كحاصل ضرب نقلات عددها .

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن $n \leq 2$. فان A مجموعة كل التبديلات الزوجية هي زمرة جزئية من S .
تدعى الزمرة الجزئية A من S بالزمرة المتبادلة على n من الرموز.
تذكر ان زمرة التماثل S رتبها .

تساعدنا المسألة التالية والمسألة ٣١ في تعيين رتبة الزمرة A من S

مسألة :

برهن التمهيدية التالية :

تمهيدية :

اي تبديلتين فرديتين في S تنتميان لنفس المجموعة المرافقة اليمنى من A . وبكلمات اخرى اذا كانت α ، β تبديلتين فرديتين في S تكون α عنصراً في المجموعة المرافقة اليمنى $A \circ \beta$.

مسألة :

اثبت التمهيدية التالية :

تمهيدية :

ليكن $n \leq 2$ عدداً صحيحاً ثابتاً . فللزمرة الجزئية A من S عدد من المجموعات المرافقة في S مقدارها . بالضبط اي ان دليل الزمرة الجزئية A في S هو ()

مسألة :

برهن النظرية التالية :

ليكن $n \leq 2$ عدداً صحيحاً ثابتاً . فللزمرة الجزئية A من S_n رتبة قدرها _____ ،
وتكون A زمرة جزئية طبيعية من S_n .

تمارين :

١ - عين هل كل من التبديلات التالية زوجية ام فردية :

$$٢. \quad \begin{pmatrix} ٥ & ٤ & ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٥ & ١ & ٣ & ٤ \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} ٥ & ٤ & ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٢ & ٤ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$$

$$ب. \quad \begin{pmatrix} ٥ & ٤ & ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ & ١ & ٢ & ٤ \end{pmatrix} , \quad هـ. \quad \begin{pmatrix} ٨ & ٧ & ٦ & ٥ & ٤ & ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٧ & ٨ & ١ & ٦ & ٥ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$$

$$جـ. \quad \begin{pmatrix} ٥ & ٤ & ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ & ٤ & ٢ & ١ \end{pmatrix} , \quad و. \quad \begin{pmatrix} ٧ & ٦ & ٥ & ٤ & ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٣ & ٢ & ١ & ٧ & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$$

٢ -

٢. اكتب قائمة بكل عناصر الزمرة المتبادلة A في S_5 .
- ب. بين ان A لها زمرة جزئية بالرتب اثنين وثلاثة واربعة على الترتيب .
- جـ. بين ان A هي الزمرة الجزئية الموصوفة في التمرين ٢,٣ - ١٤ .
- لقد لاحظنا في ذلك التمرين ان A ليس لها زمرة جزئية رتبها ستة.

٣ - اكتب قائمة بالتبديلات الفردية في S_5 . تكون هذه التبديلات احدى المجموعتين المرافقتين لـ A في S_5 .

٤ - بين ان الدورة $(١, ٢, ٣, ٤, ٥)$ ذات الطول ٥ في S_5 تكون

تبديلة زوجية اذا كانت r _____ ،

وتبديلة فردية اذا كانت r _____ .

٥ - عرف اقتراناً ϕ من S_n الى Z_2 بوضع

$$\phi(f) = \begin{cases} ١ & \text{اذا كانت } f \text{ تبديلة زوجية} \\ ٠ & \text{اذا كانت } f \text{ تبديلة فردية} \end{cases}$$

برهن ان ϕ اقتران محافظ وان $\ker \phi = A$.

٤,٣ التشاكل الذاتي والمرافقات

لنعد الى دراستنا للاقتران المحافظة وتشاكلات الزمر باعتبار تلك التشاكلات التي تقرن الزمرة S بنفسها . لقد لاحظنا ان المجموعة $M(S)$ المكونة من كل الاقتران الواحد لواحد الشاملة التي تقرن S بنفسها تكون زمرة هي زمرة التبديلات على S . فيمكننا ان نسأل هل المجموعة المكونة من كل التشاكلات $\phi : S \rightarrow S$ هي زمرة جزئية من $M(S)$ وقبل الاجابة على هذا السؤال نطور بعض الاصطلاحات والرموز .

تعريف :

التشاكل الذاتي للزمرة S هو تشاكل شامل من S الى نفسها لكل زمرة تشاكل ذاتي واحد على الاقل هو الاقتران المحايد χ المعروف بالصيغة $\chi(s) = s$ لكل $s \in S$.

مسألة :

١. لتكن ϕ زمرة الضرب المكونة من كل المصفوفات غير المنفردة 2×2 . بين ان الاقتران $\phi : \phi \rightarrow \phi$ المعروف باعتبار

$$\phi(s) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot s \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

لكل $s \in \phi$ تشاكلاً ذاتياً من ϕ .
لاحظ ان

$$\phi(s) = s = s \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ب. بين ان الاقتران $\phi : Z \rightarrow Z$ المعروف باعتبار $\phi(z) = (z^2)$ لكل $z \in Z$ تشاكلاً ذاتياً لزمرة الجمع Z .

مسألة :

لتكن S زمرة 2^5 ثابتة . عرف اقتراناً $\phi : S \rightarrow S$ بوضع $\phi(s) = s^{54}$ لكل $s \in S$. اثبت ان ϕ يكون تشاكلاً ذاتياً على S .

(الاقتران ϕ في المسألة ٣٤' هو مثال على هذا التشاكل الذاتي) واي تشاكل ذاتي على S بالصيغة المعرفة في المسألة ٣٥ يدعى تشاكلاً ذاتياً داخلياً على S . واذا لم يكن التشاكل الذاتي تشاكلاً ذاتياً داخلياً فيسمى تشاكلاً ذاتياً خارجياً.

مسألة :

عرف $\phi : Z \leftarrow Z$ بوضع $\phi (s) = -s$ لكل $s \in Z$. اثبت ان الاقتران ϕ يكون تشاكلاً ذاتياً خارجياً من $(Z, +)$ لنبحث الآن في سلوك التشاكل الذاتي الداخلي للزمرة S . ولننظر اولاً الى مثال.

مسألة :

اعتبر الزمرة $(S, \circ)$ والتبديلة

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \rho$$

٢. صف ϕ بايجاد $\phi(s)$ لكل $s \in S$.
 ب. لتكن ψ زمرة جزئية طبيعية رتبته ثلاثة في S .
 بين ان $\phi(s) \in \psi$ لكل $s \in \psi$. ولهذا فان الزمرة الجزئية الطبيعية ψ تقترن بنفسها بالاقتران الشامل ϕ .
 ج. خذ زمرة جزئية ψ بالرتبة اثنين في S بحيث ان $\rho \notin \psi$. هل يكون ϕ اقتراناً شاملاً من ψ الى نفسها؟

جد مجموعة الصور $\phi(\psi)$ والمجموعة

$$\{ \rho \circ \psi \circ \rho : \psi \in \psi \}$$

وقارن بينهما. قارن بين ψ و $\phi(\psi)$. هل تكون ψ زمرة جزئية طبيعية من S ؟
 لقد لاحظنا انه اذا كانت $(\psi, \circ)$ زمرة وكان $\phi : S \rightarrow S$ اقتراناً محافظاً فان

مجموعة الصور $\phi(\psi) = \{ \phi(s) : s \in \psi \}$ تكون زمرة جزئية من S (النظرية ٥١

في الفصل ٢). واذا كانت ψ زمرة جزئية من S فيمكننا تعريف اقتران $\phi : S \rightarrow S$ بوضع $\phi(s) = \phi(s)$ لكل $s \in \psi$ ويكون هذا الاقتران ϕ اقتراناً محافظاً. (لماذا؟). وبذا فان مجموعة الصور

$\phi = (\psi) \phi$ تكون زمرة جزئية من ψ .

مسألة :

لتكن (ψ, ϕ) زمرة ، ψ زمرة جزئية من ψ و ϕ ψ . جد تشاكلا ذاتياً على ψ بحيث تكون المجموعة $\psi \phi$ هي صورة ψ بالنسبة للتشاكل الذاتي وهذا يثبت ان $\psi \phi$ هي زمرة.

إذا كانت ψ هي زمرة جزئية من زمرة ما ψ فتسمى الزمرة الجزئية $\psi \phi$ بمرافقة ψ بالعنصر ϕ . وبالنسبة للعنصر ϕ تكون مرافقة ψ في ϕ هي العنصر $\psi \phi$. انظر التمرينين ١٠،٩ للعمل بالمرافقات .

مسألة :

لتكن ψ زمرة جزئية من الزمرة ψ ولتكن ϕ ثابتة . كيف تكون العلاقة بين ψ و $\psi \phi$ ؟ (انظر النظرية ٨٠ في الفصل ٢ لرؤية اشكال متكافئة لتعريف الزمرة الجزئية الطبيعية).

مسألة :

اثبت النظرية التالية :

نظرية :

لتكن (ψ, ϕ) زمرة . تكون الزمرة الجزئية ψ طبيعية في ψ إذا وفقط إذا اقترنت ψ بنفسها في كل تشاكل داخلي على ψ (أي ان $\phi = (\psi) \phi$ لكل $\phi \in \psi$) . ولنعد الآن الى سؤالنا الاصلي في هذا البند : هل تكون المجموعة من كل التشاكلات الذاتية على ψ زمرة جزئية من $M(\psi)$ ، الزمرة المكونة من كل التبديلات على ψ ؟ والاجابة على السؤال في النظرية التالية.

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن (ψ, ϕ) زمرة . فالمجموعة $Z(\psi)$ المكونة من كل التشاكلات الذاتية على ψ هي زمرة بالنسبة لعملية تركيب الاقترانان . ما هو وضع التشاكلات الذاتية الداخلية للزمرة ، ψ في بنية المجموعة $Z(\psi)$ ؟ تجيب المسألتان التاليتان على هذا السؤال .

مسألة :

١. برهن ان المجموعة $Z(\psi)$ المكونة من كل التشاكلات الذاتية الداخلية للزمرة (ψ, ϕ) هي زمرة جزئية من $Z(\psi)$ المكونة من كل التشاكلات الذاتية على ψ .

ب. لتكن ψ و ϕ (سه) و θ (دک) احسب

(ψ ° ϕ ° ψ) (س) لكل س ج سه .

مسألة :

استعمل المسألة ٤٢ لبرهنة النظرية التالية :

نظرية :

لتكن (س، هـ) زمرة . فتكون المجموعة كـ المكونة من كل التشاكلات الذاتية الداخلية على س زمرة جزئية طبيعية من ز (س) زمرة كل التشاكلات الذاتية على س .

لقد رأينا مثالا لتشاكل ذاتي خارجي للزمرة (Z، +) ولكن لم نلاحظ امثلة على التشاكلات الذاتية الداخلية . ولكن المسألة القادمة تصف كل التشاكلات الذاتية الداخلية للزمرة (Z، +) اضافة الى كل التبديلات الاخرى.

مسألة :

لتكن (س، +) زمرة تبديلية ، اعط وصفاً كاملاً للزمرة المكونة من كل التشاكلات الذاتية الداخلية على س. وتصبح هذه النتيجة اي زمرة تبديلية مهما يكن الرمز المستعمل للعملية .

تمارين :

- ١ - جد تشاكلا ذاتياً خارجياً لزمرة الجمع Z
- ٢ - لنوسع نتيجة المسألة ٣٦ . افرض (س، ٥) زمرة ، وعرف $\emptyset (س) = س$ لكل $س \in س$.
- ٢ . برهن انه اذا كانت $س$ زمرة تبديلية فإن $\emptyset$ تشاكل ذاتي على $س$.
- ب . هل العكس صحيح ؟ وضح
- ٣ - جد كل التشاكلات الذاتية الداخلية على $(D, +)$ وهي زمرة تماثلات المربع .
- ٤ - ٢ . جد كل التشاكلات الذاتية الداخلية على $(S, +)$
- ب . هل يوجد تشاكل ذاتي خارجي على $(S, +)$ ؟ وضح
- ٥ - جد كل التشاكلات الذاتية على $(Z, +)$.
- ٦ - جد كل التشاكلات الذاتية على $(Q, +)$.
- ٧ - جد كل التشاكلات الذاتية على $(Z, +)$ حيث d عدد أولي
- ٨ - لتكن $(س، ٥)$ زمرة . تذكر ان مركز الزمرة $س$ هو المجموعة
- $$Z(س) = \{ س : س \in س \text{ و } س \in ص = ص \text{ لكل } ص \in س \}$$
- (انظر التمرينين ٩-٢،٧ و ١٠-٢،٧) . برهن انه اذا كانت $Z \ni 1$ فان $\emptyset (س) = (س)$

س لكل $s \in S$.

برهن او انف العكس

٩ - لتكن $(S, \circ)$ زمرة نقول ان s هي مرافقة v اذا وفقط اذا وجد $a \in S$ حيث ان $s = va$. برهن ان العلاقة « s هي مرافقة v » هي علاقة تكافؤ على S .

١٠ - لتكن $(S, \circ)$ زمرة . حسب التمرين ٩ تكون العلاقة « s هي مرافقة v » هي علاقة تكافؤ لهذه العلاقة . برهن ان المركز $Z(S)$ للزمرة S هو اتحاد كل صفوف التكافؤ التي يحتوي كل منها عنصراً واحداً بالضبط

ب . برهن انه اذا كانت s زمرة منتهية فان عدد صفوف التكافؤ المرافقة التي تحتوي على عنصر واحد يقسم رتبة S .

١١ - لتكن $(S, \circ)$ زمرة ولتكن $Z(S)$ ترمز الى مركز S . اتيت ان زمرة الخارج $S/Z(S)$ تتشاكل مع الزمرة $K(S)$ المكونة من كل التشاكلات الذاتية الداخلية على S . ●

١٢ - تعريف لتكن $(S, \circ)$ زمرة ولتكن $\mathcal{C}$ مجموعة جزئية غير خالية من S . يعرف مطّبع

$$\mathcal{C} \text{ بالمجموعة } T(\mathcal{C}) = \{ \sigma \in S : \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C} \} .$$

$$\text{٢ . برهن ان } T(\mathcal{C}) = \{ \sigma \in S : \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C} \} \text{ و } \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C} \text{ و } \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C} .$$

ب . برهن ان $T(\mathcal{C})$ زمرة جزئية من S .

١٣ - لتكن S عنصراً لزمرة S .

$$\text{٢ . برهن ان } T(\{s\}) = \{s\} \text{ و } \sigma(s) = s \text{ و } \sigma(s) = s .$$

ب . برهن ان S تبقى ثابتة بالتشاكل الذاتي الداخلي ϕ اذا وفقط اذا بقيت ϕ ثابتة في التشاكل الذاتي الداخلي ϕ .

ح . برهن ان $T(\{s\})$ اذا وفقط اذا كان $s \in T(\{s\})$.

١٤ - جد المطبع $T(\{s\})$ لكل عنصر $s \in S$.

(انظر التمرين ١٣ ٢) .

١٥ - لتكن $\mathcal{C}$ زمرة جزئية من الزمرة S .

٢ . برهن ان $\mathcal{C}$ زمرة جزئية طبيعية من $T(\mathcal{C})$.

ب . برهن ان $T(\mathcal{C})$ هي اكبر زمرة جزئية من S تكون فيها $\mathcal{C}$ زمرة جزئية طبيعية .

٤,٤ الجداءات المباشرة الخارجية

يتكون المستوى الاحداثي المؤلف ${}^2R$ من كل الازواج المرتبة (f, b) حيث $\exists R$ و $b \in R$. وقد رأينا في التمرين ١,٢ - ١٠ أن المجموعة ${}^2R$ تكون زمرة بالنسبة لعملية الجمع $(+)$ المعرفة بجمع الاحداثيات: $(f, b) + (g, c) = (f + g, b + c)$. وفي هذا البند نعمم المثال ${}^2R$ ونبين كيف نكون زمرة جديدة من اي زمرتين $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ مفروضتين. ونبرهن ان هذه الزمرة الجديدة (واسعة) بمعنى انها تحتوي على زمرة جزئية متشاكلة مع $\mathcal{V}$ و زمرة جزئية اخرى متشاكلة مع $\mathcal{W}$.

تعريف :

لتكن $(\mathcal{V}, \oplus)$ و $(\mathcal{W}, *)$ زمرتين. فالجداء المباشر الخارجي لـ $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ هو الجداء الديكارتي

$$\mathcal{V} \times \mathcal{W} = \{ (v, w) : v \in \mathcal{V}, w \in \mathcal{W} \}$$

بالنسبة لعملية معرفة كالتالي :

$$(v, w) \oplus (v', w') = (v \oplus v', w * w')$$

لكل $v, v' \in \mathcal{V}$ و $w, w' \in \mathcal{W}$ ويرمز للجداء المباشر الخارجي لـ $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ بالرمز $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$.

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

إذا كانت $(\mathcal{V}, \oplus)$ و $(\mathcal{W}, *)$ زمرتين، فإن $(\mathcal{V} \times \mathcal{W}, \oplus)$ زمرة. إذا كانت $(\mathcal{V}, \oplus)$ و $(\mathcal{W}, *)$ زمرتين ضرب فتكتب العملية على $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ بالصيغة $(v, w) \cdot (v', w') = (v \cdot v', w * w')$ وتسمى الضرب.

وإذا كانت $(\mathcal{V}, \oplus)$ و $(\mathcal{W}, *)$ زمرتين جمع فتكتب العملية على $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ بالصيغة $(v, w) + (v', w') = (v + v', w * w')$ وتسمى الجمع.

وفي هذه الحالة يسمى بعض المؤلفين $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ الجمع المباشر الخارجي لـ $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$.

مسألة :

١. لتأخذ الزمرتين $(Z, +)$ و $(Z, \cdot)$. اكتب قائمة بالعناصر في $Z \times Z$. ما رتبة الزمرة $Z \times Z$ ؟

ب. لتكن (صه ، هـ) و (ع ، *) زمرتين منتهيتين .
 عبر عن رتبة الزمرة (صه × ع ، □) بدلالة رتبة صه ورتبة ع .
 تذكر انه اذا كانت (سه ، +) زمرة فالمضاعف ن^١ (ن ∈ Z) للعنصر ∃^٢ سه يعرف
 استقرائياً كما يلي : (٠) = ٢ ، ٠ = ٢ .
 ن^١ = ٢ (ن - ١) . ١ + ٢ حيث ن ∈ Z⁺ ، و (ن - ١) = ٢ (ن - ٢) حيث ن ∈ Z⁺ ،
 وبالمثل اذا كانت (سه ، هـ) زمرة لا جمعية فتعرف القوى ^٢ ن (ن ∈ Z) للعنصر ∃^٢ س
 كما يلي :

$$١ = ٢ ، و ٢ = ٢ ، ٣ = ٢ ، ٤ = ٢ ، ٥ = ٢$$

 حيث

$$ن ∈ Z⁺ و ٢ = ٢ (١) حيث ن ∈ Z⁺ .$$

وتدلنا المسألة التالية كيف نحسب القوى او المضاعفات من صه × ع لزمرتين معينتين صه و
 ع وهي تفيدنا اذا رغبتا في ايجاد رتبة عنصر ما من صه × ع .

مسألة :

لتكن صه ، ع زمرتين ، وليكن (صه ، ع) عنصراً في صه × ع . وليكن ن عدداً صحيحاً موجباً .
 ١. اذا كان صه و ع زمرتي ضرب ، فاحسب (صه ، ع)^٢ و (صه ، ع)^٣ .
 ثم (صه ، ع)^٤ = (،) .
 ب. اذا كانت صه و ع زمرتي جمع ، احسب (صه ، ع) و ٣ (صه ، ع) .
 ثم ن (صه ، ع) = (،) .
 في المسألة التالية ننظر في امثلة اخرى للجداء المباشر ونبحث في العلاقة بين رتبة (صه ،
 ع) ∃ صه × ع ورتبة صه ∃ ع و ع ∃ ع .

مسألة :

اعتبر زمرتي الجمع $Z_٣$ و $Z_٣$
 ١. جد رتبة كل عنصر في $Z_٣ \times Z_٣$
 ب. هل $Z_٣ \times Z_٣$ زمرة دورية ؟ (انظر البند ٢،٦ لتعريف الزمرة الدورية)
 جـ برهن او انف ان $Z_٣ \times Z_٣$ تتشاكل مع زمرة الجمع $Z_٩$.

مسألة :

اعتبر زمرتي الجمع $Z_٤$ و $Z_٤$
 ١. جد اصغر عدد صحيح موجب ر بحيث ان ر . ٤ = ٠ لكل $٤ \in Z_٤$
 ب. جد اصغر عدد صحيح موجب م بحيث ان م . ٤ = ٠ لكل $٤ \in Z_٤$
 جـ جد اصغر عدد صحيح موجب ن بحيث ان ن (٤ ، ٤) = (٤ ، ٤) لكل $(٤ ، ٤) \in Z_٤ \times Z_٤$.

احسب كل حواصل الجمع الممكنة $(٢, ٣) + (٢, ٣)$ لعنصرين الاول منها في Z والثاني في Z .

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن φ و ψ زمريتين ، فان

١. $\varphi \cap \psi$ تكونان زمريتين جزئيتين من φ و ψ .

ب. $\varphi \cap \psi = \{ \text{————} \}$.

ج. لكل عنصر $h \in \varphi \times \psi$ تمثيل واحد بالضبط صيغته $h = \varphi \cap \psi$ حيث $\varphi \in \varphi$ و $\psi \in \psi$.

د. تكون φ متشاكلة مع ψ ، φ متشاكلة مع ψ .

مسألة :

برهن ان زمرة الخارج $(\varphi Z \times \psi Z) / \varphi Z$

تكون متشاكلة مع الزمرة ————. تذكر ان عنصر الزمرة الخارج هو مجموعة مرافقة صيغتها $(\varphi, \psi) + \varphi Z$. جد كل المجموعات المرافقة المختلفة لـ φZ .

ان نظرية التشاكل الاولى من النتائج الهامة المفيدة للفصل ٢ . وتقول هذه النظرية انه اذا كان φ اقتراناً محافظاً شاملاً من زمرة φ الى زمرة ψ وكانت نو $(\varphi) = \{ \emptyset \}$ فتكون الزمرة الخارجة φ / ψ متشاكلة مع ψ . فمثلاً اذا اردنا ان نبرهن ان $(\varphi \times \psi) / \varphi$ متشاكلة مع زمرة ψ نحتاج فقط الى تعريف اقتران φ من $\varphi \times \psi$ الى ψ ونبرهن انه اقتران محافظ شامل يحقق $\varphi = \text{نو}(\varphi)$.

مسألة :

١. برهن التمهيدية التالية :

تمهيدية :

لتكن φ و ψ زمريتين . فهناك اقتران محافظ شامل φ من

$\varphi \times \psi$ الى ψ بحيث ان نو $(\varphi) = \{ \emptyset \}$.

ب. اذكر نتيجة مماثلة للزمرة φ .

مسألة : ٥٩

اكمل العبارة التالية وبرهن النظرية :

نظرية :

لتكن φ و ψ زمريتين . فتكون الزمرة الخارجة $(\varphi \times \psi) / \varphi$ متشاكلة مع ————

- د. قرر هل $Z \times Z$ زمرة دورية ام لا .
و. برهن او انف أن $Z \times Z$ متشاكلة مع زمرة الجمع Z .

مسألة :

لتكن φ و ψ زمرتين منتهيتين ولتكن $\varphi \in \varphi$ و $\psi \in \psi$.
عبر عن رتبة العنصر (ص ، ع) $\varphi \in \varphi$ $\times$ $\psi \in \psi$ بدلالة رتبة ص ورتبة ع .
رأينا في البند ٢,٦ ان كل زمر الجمع Z ، ن Z دورية وان كل زمرة دورية رتبته ن تكون متشاكلة مع Z . ونرغب الآن في الاجابة على السؤال التالي : لأي من الاعداد الصحيحة الموجبة م ، ن يكون الجداء المباشر الخارجي $Z \times Z$ زمرة دورية ؟
ان هذا ما تحتويه النظرية التالية .

مسألة :

اكمل العبارات التالية :

نظرية :

١. يكون الجداء المباشر الخارجي لزمرتي الجمع Z و Z زمرة دورية اذا وفقط اذا كان

ب. تكون زمرة الجمع $Z \times Z$ متشاكلة مع زمرة الجمع Z اذا وفقط اذا _____ .

نظرية :

لتكن (ص ، هـ) و (ع ، *) زمرتين . فيكون الجداء المباشر الخارجي $\varphi \in \varphi$ $\times$ $\psi \in \psi$ تبديلياً اذا وفقط اذا كانت كل من φ و ψ تبديلية .
اترك برهان النظرية للتمرين ١ .

ذكرنا عند بداية هذا البند ان $\varphi \in \varphi$ $\times$ $\psi \in \psi$ واسعة بمعنى انها تحتوي على زمرة جزئية متشاكلة مع φ و زمرة جزئية اخرى متشاكلة مع ψ . وفي المسائل القادمة نعرف وندرس هذه الزمرة الجزئية وزمرها الخارجية.

تعريف :

$$\text{لتكن } \varphi \text{ و } \psi \text{ زمرتين ، ولتكن } \varphi = \{ \varphi \} \times \psi = \{ \psi \} \\ \{ (\varphi , \psi) : \varphi \in \varphi , \psi \in \psi \} = \varphi \times \psi = \{ (\varphi , \psi) : \varphi \in \varphi , \psi \in \psi \}$$

لاحظ ان φ و ψ عرفتا باعتبارهما مجموعتين جزئيتين من $\varphi \times \psi$.

مسألة :

في $Z \times Z$ جد عناصر المجموعتين $\bar{Z}$ و $\bar{Z}$.

والزمرة الخارجة ($\mathcal{V} \times \mathcal{E}$) / $\mathcal{E}$ متشاكلة مع _____ .
تمارين :

- ١ - برهن النظرية ٥٣ .
- ٢ - اذا كانت $\mathcal{V}$ و $\mathcal{E}$ زمريتين دوريتين منتهيتين في الشرط على رتبتي $\mathcal{V}$ و $\mathcal{E}$ الذي يضمن ان تكون $\mathcal{V} \times \mathcal{E}$ زمرة دورية . برهن نتيجتك .
- ٣ - برهن او انف ان $Z \times Z$ زمرة دورية بالنسبة للجمع .
- ٤ - لتكن $\mathcal{V}$ و $\mathcal{E}$ زمريتين ولتكن $\mathcal{V}_1$ و $\mathcal{E}_1$ زمريتين جزئيتين من $\mathcal{V}$ و $\mathcal{E}$ على الترتيب . برهن ان $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{E}_1$ زمرة جزئية من $\mathcal{V} \times \mathcal{E}$.
- ٥ - جد كل الزمر الجزئية في $Z \times Z$ بالنسبة للجمع .
- ٦ - لتكن $(\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1)$ ، $(\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2)$ ، ... $(\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n)$ زمر عرف جداء مباشراً خارجياً $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_n$ و $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \times \dots \times \mathcal{E}_n$ عملية على الجداء المباشر الخارجي . برهن ان $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_n$ تكون زمرة بالنسبة لهذه العملية .
- ٧ - ا. برهن او انف ان زمرة الجمع $Z \times_p Z \times_p Z \times_p \dots \times_p Z$ تكون متشاكلة مع زمرة الجمع Z_p .
ب. برهن او انف ان $Z \times_q Z \times_q Z \times_q \dots \times_q Z$ تكون متشاكلة مع زمرة الجمع Z_q .

٤,٥ الجداءات المباشرة الداخلية

اعتبرنا في ٤,٤ ان (صه ، ٥) و (ع ، +) اي زمرتين ، وكونتا الجداء المباشر الخارجي صه × ع. وفي هذا البند نبين ما معنى ان تكون زمرة ما سه الجداء المباشر الداخلي لزمرتين جزئيتين طبيعيتين . ونبين انه يمكن التعبير عن عدة زمر مألوفة بصيغة جداء مباشر داخلي لزمرتين طبيعيتين . ونجد ايضاً علاقة بين الجداء المباشر الداخلي والجداء المباشر الخارجي لزمرتين جزئيتين طبيعيتين لأي زمرة.

اذا كانت صه و ع زمرتين جزئيتين من الزمرة سه فيكون تعريف صه ٥ ع بانه المجموعة

$$\text{صه } ٥ \text{ ع} = \{ (ص ٥ ع) : ص \in \text{صه} , ع \in \text{ع} \}$$

مسألة :

برهن ان المجموعة صه ٥ ع تكون زمرة جزئية طبيعية للزمرة سه اذا كانت صه و ع زمرتين جزئيتين طبيعيتين من سه . ▲
انظر التمرين ٢,٧ - ١٥ لدراسة امثلة عما يحدث اذا لم تكن صه و ع زمرتين جزئيتين طبيعيتين.

تعريف :

لتكن صه و ع زمرتين جزئيتين طبيعيتين للزمرة سه . فتكون سه الجداء المباشر الداخلي لـ صه و ع اذا وفقط اذا كان سه = صه ٥ ع و صه ∩ ع = {و} .

مسألة :

١. في زمرة الجمع م (R) لتكن

$$\text{صه} = \left\{ \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix} : ١, ٢, ٣, ٤ \in R \right\} \text{ و}$$

$$\text{ع} = \left\{ \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix} : ١, ٢, ٣, ٤ \in R \right\}$$

برهن ان $M(R)$ هي الجداء المباشر الداخلي للزمرتين V و E .
 ب. اثبت ان زمرة الجمع

$$\{Q, \sqrt{2} + \sqrt{2}, \sqrt{2} + \sqrt{2}, \sqrt{2} + \sqrt{2}\} = [\sqrt{2}]$$

هي الجداء المباشر الداخلي للزمرتين جزئيتين فعلا .

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

اذا كانت S زمرة هي الجداء المباشر الداخلي للزمرتين الجزئيتين الطبيعيتين V و E . فان
 $V \cap E = \{e\}$ لكل $V \in V$ و $E \in E$.

لاحظ ان النظرية ٦٣ لا تقول ان S زمرة تبديلية . انها تقول ببساطة ان العنصرين V و E
 يتبادلان اذا اختيرا من الزمرتين الجزئيتين الطبيعيتين V و E على الترتيب حيث $V \cap E = \{e\}$
 و $V \cap E = \{e\}$.

مسألة :

برهن النظرية التالية

نظرية :

لتكن V و E زمريتين جزئيتين طبيعيتين من الزمرة S . فتكون S الجداء المباشر الداخلي
 للزمرتين V و E اذا وفقط اذا كان لكل عنصر $h \in S$ تمثيل واحد بالضبط صيغته $h = V \cap E$
 حيث $V \in V$ و $E \in E$.

لقد لاحظنا ان الجداء المباشر الخارجي $V \times E$ للزمرتين V و E يحتوي على زمريتين جزئيتين
 طبيعيتين V و E بحيث ان كل عنصر $h \in V \times E$ يكون تمثيله وحيداً كالتركيب $h = V \cap E$
 $V \in V$ حيث $V \in V$ و $E \in E$ (النظرية ٥٦) ولهذا يمكن كتابة الجداء المباشر الخارجي
 ايضاً كجداء مباشر داخلي $V \cap E$.

مسألة :

٢. بين ان زمرة الجمع Z_7 هي الجداء المباشر الداخلي للزمرتين جزئيتين بالرتبتين اثنين وثلاثة
 على الترتيب.

ب. بين ان زمرة الجمع Z_7 متشاكلة مع الجداء المباشر الخارجي للزمرتين في الجزء ١.

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

تكون الزمرة (صه ، هـ) الجداء المباشر الداخلي لزمرتين جزئيتين طبيعيتين صه و عـ اذا وفقط اذا كانت صه متشاكلة مع الجداء المباشر الخارجي صه × عـ .

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

اذا كانت (صه ، هـ) الجداء المباشر الداخلي لزمرتين جزئيتين طبيعيتين صه و عـ فتكون صه / هـ متشاكلة مع عـ و صه / عـ متشاكلة مع صه .
تقول النظرية ٥٢ ب ان زمرة الجمع $Z \times Z$ متشاكلة مع زمرة الجمع Z اذا وفقط اذا
لنستعمل هذه النتيجة مع نظرية ٦٦ لتعيين متى تكون Z جداء مباشراً داخلياً .

مسألة :

اكمل العبارة التالية وبرهن النظرية .

نظرية :

تكون زمرة الجمع Z الجداء المباشر الداخلي لزمرتين جزئيتين رتبتيهما م و ن على الترتيب ، اذا
وفقط اذا _____

تمارين :

- ١ - جد عدة طرق لتمثيل زمرة الجمع م (R) بصيغة جداء مباشر داخلي لزمرتين جزئيتين فعلا .
- ٢ - اثبت ان زمرة الضرب .

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

يمكن تمثيلها بصيغة الجداء المباشر الداخلي لزمرتين جزئيتين فعلا .

٣ - عين هل يمكن تمثيل كل من الزمر التالية بصورة جداء مباشر داخلي لزمرتين جزئيتين فعلا ام لا .

علل استنتاجك .

١. $(\mathbb{Z}, +)$

ب. $(S, \cdot)$

ح. $(D, \cdot)$

٤ - جد كل قيم n بحيث يمكن تمثيل الزمرة $(\mathbb{Z}, +)$ بصيغة جداء مباشر داخلي لزمرتين جزئيتين فعلا . علل استنتاجك.

٥ - لتكن S زمرة متشاكلة مع الجداء المباشر الخارجي $S_1 \times S_2$ لزمرتين S_1 و S_2 . برهن ان S تكون الجداء المباشر الداخلي لزمرتين جزئيتين طبيعيتين في S .

٦ - وضع النظرية ٦٧ بايجاد زمرتين جزئيتين فعلا لزمرة الجمع $(\mathbb{Z}, +)$.

٧ - اعتبر المجموعة $Z = \{ \sqrt{2} + 1 : \sqrt{2} \in \mathbb{Z} \}$

١. اثبت ان $Z = \sqrt{2} \mathbb{Z}$ زمرة جزئية من R بالنسبة للجمع .

ب. اثبت ان $Z = \sqrt{2} \mathbb{Z}$ هي الجداء المباشر الداخلي لزمرتين جزئيتين فعلا S و E . ثم

وضح النظرية ٦٧ بايجاد تشاكل صريح بين $Z = \sqrt{2} \mathbb{Z} / \sqrt{2} \mathbb{Z}$ و E وتشاكل بين

$$Z = \sqrt{2} \mathbb{Z} / \sqrt{2} \mathbb{Z}$$

٨ - برهن ان زمرة الجمع Q لا يمكن تمثيلها كجداء مباشر داخلي لزمرتين جزئيتين فعلا.

٩ - برهن ان زمرة الجمع R لا يمكن تمثيلها كجداء مباشر لزمرتين جزئيتين فعلا.

١٠ - لتكن $(S, +)$ زمرة . ولتكن $S_1, S_2, \dots, S_r$ زمراً جزئية طبيعية من S . ولتكن

$$\{ S_1, S_2, \dots, S_r \} = \{ S_1, S_2, \dots, S_r \} \text{ حيث } r = 1, 2, \dots, n$$

١. برهن الاستقراء ان $S_1, S_2, \dots, S_r$ تكون زمرة جزئية طبيعية من S .

ب. نقول ان S هي الجداء المباشر الداخلي للزمر الجزئية الطبيعية $S_1, S_2, \dots, S_r$.
 S اذا وفقط اذا كان كل عنصر $h \in S$ يمكن تمثيله تمثيلاً وحيداً كتركيب بالصيغة

هـ = ص_٥، ص_٥، ... ص_٥ حيث ص_٥ حيث ر = ١، ٢، ...، ن .
 نرهن انه اذا كان س_٥ الجداء المباشر الداخلي للزمرة الجزئية الطبيعية
 ص_٥، ص_٥، ...، ص_٥ فان س_٥ = ص_٥، ص_٥، ...، ص_٥ و

ص_٥، ص_٥، ...، ص_٥ = {و} لكل ر، م، {١، ٢، ...، ن}، ر ≠ م.

١١ - لتكن (س_٥، +) زمرة تبديلية منتهية رتبها ن. فاذا كان د عدداً اولياً يقسم ن فلتكن ص_٥
 المجموعة المكونة من كل عناصر س_٥ التي تكون رتبها احدى قوى د. فتكون ص_٥ زمرة
 جزئية من س_٥ (التمرين ٢-٢،٢) اثبت انه اذا كانت ن = د_١ د_٢ ... د_٢ حيث د_١،
 د_٢، ...، د_٢ اعداد أولية مختلفة

و د_١، د_٢، ...، د_٢، $\exists Z^+$ ، ص_٥، ص_٥، ...، ص_٥ :

س_٥ = ص_٥ + ص_٥ + ... + ص_٥ . ●

يبين التمرين ٢،٨ - ١١ ان كلا من المجموعات ص_٥ تحتوي على عنصراً مخالف للعنصر
 المحايد.

مراجعة

تشاكل ذاتي	دورة
تشاكل ذاتي داخلي	نقطة
تشاكل ذاتي خارجي	طول الدورة
مرافقة لزمرة	دورات منفصلة
مرافقة لعنصر	تبديلية زوجية
جداء مباشر خارجي	تبديلية فردية
جداء مباشر داخلي	زمرة متبادلة

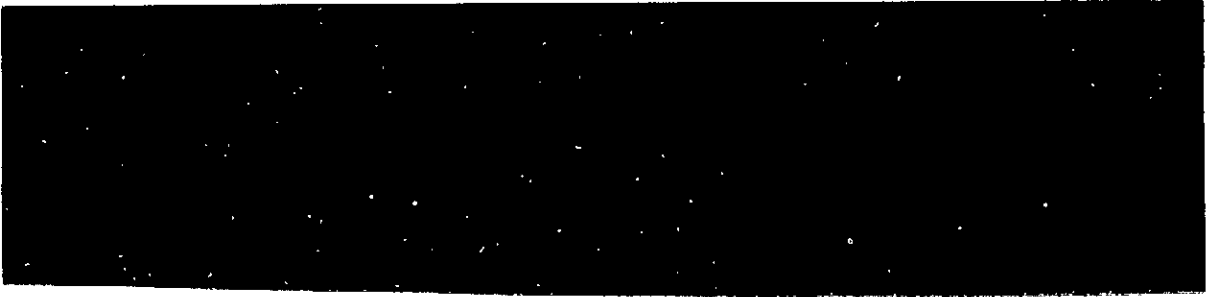
الرموز

$\mathcal{D}(\mathcal{S})$	$(1, 2, \dots, n)$
$\mathcal{K}$	$\mathcal{Q}(n)$
$\mathcal{S} \times \mathcal{E}$	$\mathcal{Q}_h(n)$
$\{\mathcal{W}\} \times \mathcal{S} = \mathcal{S}$	A^n
$\mathcal{E} \times \{\mathcal{W}\} = \mathcal{E}$	$\mathcal{S} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S}$
$\mathcal{S} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S}$	$\emptyset$

اسئلة :

- ١ - بين طريقة لتحليل اي تبديلة الى تركيب دورات . هل هذا التركيب وحيد ؟
- ٢ - بين طريقة لتحليل اي تبديلة الى تركيب نقلات . هل هذا التحليل وحيد ؟
- ٣ - هل النقل تبديلة فردية ام زوجية ؟ متى يكون تركيب $\mathcal{R}$ من النقلات زوجياً ؟ متى يكون فردياً ؟
- ٤ - تحت اي شروط على α ، $\mathcal{S} \ni \mathcal{B}$ يكون التركيب $\mathcal{B} \circ \alpha$ تبديلة زوجية ؟ تبديلة فردية ؟
- ٥ - ما دليل الزمرة المتبادلة A^n في $\mathcal{S}$ ؟
ما رتبة A^n ؟
- ٦ - اذكر شرطاً بدلالة تشاكل ذاتي داخلي لتعيين هل كانت الزمرة الجزئية طبيعية ام لا
- ٧ - هل تكون المجموعة $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ المكونة من كل التشاكلات زمرة ذاتية بالنسبة للتركيب ؟
هل تكون المجموعة كالمكونة من كل التشاكلات الذاتية الداخلية زمرة جزئية من $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ ؟
هل تكون زمرة جزئية طبيعية ؟

- ٨ - تحت اي شرط على م و ن يكون الجداء المباشر الخارجي $Z \times Z$ زمرة دورية بحيث تكون متشاكلة مع Z ؟ تحت اي شرط على م و ن تكون Z من الجداء المباشر الداخلي لزمرتين جزئيتين احدهما برتبة م والثانية برتبة ن؟
- ٩ - اذا كانت صه و ع زمرتين جزئيتين طبيعيتين من زمرة سه فهل تكون صه ع زمرة جزئية من سه؟ هل تكون زمرة جزئية طبيعية؟ اذا كانت صه $\neq$ ع $\{و\}$ أو صه ع = سه فهل يمكن تمثيل كل عنصر من سه تمثيلا وحيداً . بالصيغة ه $\neq$ صه ع حيث صه صه و ع ع؟
- ١٠ - اذا كان سه الجداء المباشر الداخلي لزمرتين جزئيتين طبيعيتين (فعلا) فهل تكون سه متشاكلة مع جداء مباشر خارجي لزمرة غير تافهة؟
- ١١ - اذا كانت سه = صه $\times$ ع فاي زمرة تكون متشاكلة مع سه / صه؟
- اذا كانت سه الجداء المباشر الداخلي لزمرتين جزئيتين طبيعيتين صه و ع فاي زمرة تتشاكل مع سه / صه؟



فصل ٥

الحلقات الخارجة والمثاليات

وجدنا في الفصل ٢ ان الزمر الجزئية الطبيعية تلعب دوراً هاماً في انشاء زمر خارجة . وفي هذا الفصل تلعب المثاليات دوراً مماثلاً في تكوين «الحلقات الخارجة» وعندما نحصل على مثل هذه الحلقات ندرس شروط كونها حلقات كاملة أو حقولاً. وتعطينا هذه الشروط صفيين من المثاليات : المثاليات «الاولية» والمثاليات «العظمى» .

وكتطبيق على ذلك ندرس حلقة الاقترانات المتصلة ومثالياتها العظمى .

ولكننا نبدأ ببعض الموضوعات عن نظرية الحلقات الحدودية .

وتزودنا هذه الحلقات ببعض الامثلة الهامة لدراسة البنود القادمة.

٥,١ المثاليات في الحلقات الحدودية

يدرس الطالب في المدرسة الثانوية صيغ الحدوديات والمعادلات . وفي التفاضل والتكامل يتعلم الطالب ان الحدوديات ذات المعاملات العددية أو النسبية يمكن اعتبارها اقترانات وسنرى في هذا البند انه اذا كانت (ج ، + ، ٠) حلقة تبديلية ذات عنصر محايد و قـ (س) د جـ [س] فاننا نستطيع ان نعرف «الاقتران الحدودي» على جـ باستخدام قـ (س) وبعدها يمكن استخدام هذا الاقتران لتحقيق هل الحدودية س - ٢ ، ٢ $\ni$ جـ أحد عوامل الحدودية قـ (س) ام لا .

تعريف :

لتكن $(\cdot, +, \cdot)$ حلقة تبديلية ذات عنصر محايد . فلكل

$$q(s) = \sum_{i=1}^n a_i s^i \in [s]$$

يرمز $q(r)$ للعنصر $q(r) = \sum_{i=1}^n a_i r^i$ في $\mathcal{H}$. ويعرف التناظر

$r \longleftarrow q(r)$ حيث $r \in \mathcal{H}$ اقتراناً

$q: \mathcal{H} \longleftarrow \mathcal{H}$ نسميه اقتراناً حدودياً وقاعدة التناظر فيه $r \longleftarrow q(r)$.
فمثلاً الصيغة الحدودية

$$q(s) = s^2 - s^2 - s^2 + s^2$$

في $Z[s]$ تعين الاقتران الحدودي $q: Z \longleftarrow Z$ المعروف بوضع
 $q(r) = r^2 - r^2 - r^2 + r^2$ لكل $r \in Z$

مسألة :

١. في $Z[s]$ لتكن

$$q(s) = s^2 - s^2 - s^2 + s^2$$

جد $q(1)$ ، $q(2)$ و $q(-1)$. اثبت ان $s - 1$ و $s - 2$ عاملان في $q(s)$:
يمكنك عمل ذلك باثبات ان

$$q(s) = (s - 1)(s - 2)h(s)$$

حيث $h(s) \in Z[s]$

ب. في $Z[s]$ لتكن $q(s) = s^2 - s^2 - s^2 + s^2$. جد $q(a)$ لكل $a \in Z$.

مسألة :

اثبت انه اذا كانت $(\cdot, +, \cdot)$ حلقة تبديلية ذات عنصر محايد و $q(s)$ ،

$$h(s) \in [s] \text{ حيث } q(s) = h(s)$$

فان $q(r) = h(r)$ لكل $r \in \mathcal{H}$.

اذا كانت $(\cdot, +, \cdot)$ احدى الحلقات الكاملة Z ، Q أو R فان عكس الفرضية في المسألة ٣ تكون صحيحة . وهذا سيبرهن في المسألة ٧ .

تعريف :

لتكن $\mathcal{H}$ حلقة تبديلية ذات عنصر محايد ولتكن $q \in (\mathcal{S})$ حيث $\mathcal{H} \in (\mathcal{S})$
 أ. تكون أي حدودية $h \in (\mathcal{S})$ حيث $h \in (\mathcal{S})$ عاملاً في $q \in (\mathcal{S})$ إذا وفقط إذا وجد حدودية $l \in (\mathcal{S})$ حيث $\mathcal{H} \in (\mathcal{S})$ حيث $h \in (\mathcal{S})$ = $h \in (\mathcal{S})$ ك $(\mathcal{S})$.

ب. يكون العنصر $h \in (\mathcal{S})$ حيث $h \in (\mathcal{S})$ واحد اصفار الاقتران الحدودي $q \in (\mathcal{S})$ إذا وفقط إذا كان $q \in (\mathcal{S})$ = 0 .
 وبالتجربة نعلم ان الحدودية التربيعية $h^2 s + h s + s^2 \in (\mathcal{S})$ لها عامل $s - l$ إذا وفقط إذا كانت l صفراً للحدودية ، أي $h^2 l + h l + l^2 = 0$.

ونريد ان نثبت ان نتيجة مماثلة تصح على أي حدودية في $\mathcal{H} \in (\mathcal{S})$ حيث $\mathcal{H} \in (\mathcal{S})$ حلقة تبديلية ذات عنصر محايد . وكخطوة أولى في هذا الاتجاه لنبتكر طريقة لقسمة حدودية $q \in (\mathcal{S})$ حيث $\mathcal{H} \in (\mathcal{S})$ على الحدودية $s - l$.

إذا كانت $q \in (\mathcal{S})$ حيث $\mathcal{H} \in (\mathcal{S})$ حيث $q \in (\mathcal{S})$ = $((s) \cap q) = n \leq 1$ فان
 $q \in (\mathcal{S})$ = $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$.
 حيث $a_n \neq 0$ ولكن

$$a_n s^n = a_n s^{n-1} (s - l) + (a_n s - a_{n-1} s^{n-1}) \text{ ولهذا فان}$$

$$q \in (\mathcal{S}) = (a_n s^{n-1} (s - l) + (a_n s - a_{n-1} s^{n-1}) + \dots + (a_1 s - a_0))$$

مسألة :

استعمل الطريقة السابقة لتبيان هل $s - l$ عامل في $\mathcal{H} \in (\mathcal{S})$ أم لا للحدودية
 $s^3 + s^2 + s + 1 = (s - l) s^2 + \dots$.

نظرية :

لتكن $\mathcal{H}$ حلقة تبديلية ذات عنصر محايد ولتكن $q \in (\mathcal{S})$ حيث $\mathcal{H} \in (\mathcal{S})$. فيكون العنصر $h \in (\mathcal{S})$ صفراً لاقتران الحدودية $q \in (\mathcal{S})$ إذا وفقط إذا كان $s - l$ عاملاً للحدودية $q \in (\mathcal{S})$. او بعبارة مكافئة $q \in (\mathcal{S})$ = 0 حيث $h \in (\mathcal{S})$ إذا وفقط إذا كان
 $q \in (\mathcal{S})$ = $(s - l) k \in (\mathcal{S})$

حيث الحدودية $k \in (\mathcal{S})$ حيث $\mathcal{H} \in (\mathcal{S})$

برهن النظرية ٦ بحل المسألة التالية :

مسألة :

أ. اثبت انه إذا كانت $q \in (\mathcal{S})$ حيث $\mathcal{H} \in (\mathcal{S})$ حيث $\mathcal{H} \in (\mathcal{S})$ حلقة تبديلية ذات عنصر محايد وإذا كانت

$$ق(س) = (س - ٢) ك (س)$$

$$فان ق(٢) = ٠$$

يوهن العكس باستخدام المبدأ الثاني للاستقراء . ولعمل ذلك لتكن هن هي العرضية : لكل حدودية ق(س) رتبتهان في جـ [س] ، اذا كانت ق(٢) = ٠ فان س - ٢ احد عوامل ق(س).

اثبت ان هن صحيحة.

افرض ان العبارة هن صحيحة لجميع قيم ر حيث $١ \leq ر \leq ن$:

فلكل حدودية ق(س) رتبتهان $ر \geq ن$ ، اذا كانت ق(٢) = ٠ ، يكون س - ٢ احد عوامل ق(س).

ولبرهان ان هن تكون صحيحة افرض ان ق(س) حدودية درجتها $١ + ن$ بحيث ان ق(٢) = ٠ ، وبرهن ان ق(س) = (س - ٢) ك (س).

حيث ك(س) جـ [س]. ولعمل ذلك طبق الطريقة التي نوقشت قبل مسألة ٥ للحدودية ق(س) التي رتبتهان $١ + ن$.

مسألة :

جد كل الاصفار في Z للاقتران الحدودي

$$ق(ر) = ر^٢ - ٢ر - ٤ + ٤$$

كم صفراً يوجد للاقتران الحدودي هـ (ر) = $ر^٢ - ٢ر$ في Z ؟ في Q ؟ في R ؟

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن جـ حلقة كاملة ولتكن ق(س) جـ [س] حدودية رتبتهان $١ \leq ن$. فالاقتران الحدودي ق(س)

له ن من الاصفار على الاكثر وللحدودية ق(س) على الاكثر ن من العوامل ذات الصيغة س - ٢ ،

٢ جـ . ويتطلب اي برهان صحيح لنظرية ٩ استعمال الشرط ان جـ حلقة كاملة . وبيين

المثال التالي ان النظرية ٩ يمكن ان تفشل فشلا ذريعاً اذا لم تكن جـ حلقة كاملة .

مسألة :

خذ الحدودية ذات الدرجة الأولى ق(س) = $٦س$ في $٢٢Z$ [س] .

بين ان للاقتران الحدودي ق(س) ستة اصفار في $٢٢Z$ وان للحدودية ستة عوامل مختلفة من درجة

الواحد في $٢٢Z$ [س] . هل تكون ق(س) حاصل الضرب لهذه العوامل الستة ؟

والان وبعد ان درسنا عوامل واصفاراً للحدوديات في جـ [س] فلنركز اهتمامنا على المثاليات في جـ

[س] .

مسألة :

لتكن $\mathcal{H}$ حلقة تبديلية ذات عنصر محايد وليكن $\mathcal{H} \ni \mathcal{H}$ عنصراً ثابتاً . اثبت ان المجموعة $\mathcal{H} =$

$$\{ (s) \in \mathcal{H} \mid [s] = 0 \} \text{ تكون مثالية في } \mathcal{H} [s] \text{ وان}$$

$$\mathcal{H} = (s - \mathcal{H}) [s]$$

$$= \{ (s - \mathcal{H}) : (s) \in \mathcal{H} \}$$

لقد رأينا انه يمكن كتابة كل مثالية في $\mathcal{H}$ بالصيغة $\mathcal{H} \ni \mathcal{H}$ حيث $\mathcal{H}$ ثابتة. وتبين المسألة ١١ ان بعض المثاليات في $\mathcal{H} [s]$ تكون مشابهة للمثاليات في $\mathcal{H}$ بمعنى انه يمكن كتابتها «كمضاعف» $(s - \mathcal{H}) [s]$ ، للحلقة $\mathcal{H} [s]$. ورأينا أيضاً في البند ٣,٢ انه اذا كانت $\mathcal{H}$ حلقة تبديلية ذات عنصر محايد فان كل مجموعة صيغتها $\mathcal{H} \ni \mathcal{H}$ تكون مثالية في الحلقة $\mathcal{H}$. وبذا ، فاذا كانت $\mathcal{H} \ni \mathcal{H}$ فتكون $\mathcal{H} (s) [s]$ مثالية في $\mathcal{H} [s]$.

تعريف :

لتكن $\mathcal{H}$ حلقة تبديلية ذات عنصر محايد . فتكون المثالية $\mathcal{H}$ في $\mathcal{H}$ مثالية رئيسية اذا وفقط اذا

$$\mathcal{H} = \mathcal{H} \cdot \mathcal{H} \text{ حيث } \mathcal{H} \in \mathcal{H}$$

لبعض $\mathcal{H} \in \mathcal{H}$. وعالماً ما يرمز للمثالية الرئيسية بالرمز $(\mathcal{H})$ ، حيث $(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}$ حيث $\mathcal{H} \in \mathcal{H}$

لاحظ انه ليس من الضروري ان تكون المثالية الرئيسية مثالية فعلية . والواقع ، ان المثالية (0)

$$\text{هي المثالية الرئيسية : } (0) = \{ 0 \}$$

في حين ان الحلقة $\mathcal{H}$ هي نفسها مثالية رئيسية ، المثالية $(1) = \mathcal{H}$

وتعطينا المسألة التالية مثالا على مثالية رئيسية وعلى مثالية ليست رئيسية .

مسألة :

١. اثبت ان المجموعة

$$\{ (s + 2) \cdot (s + 4) : (s) \in \mathcal{H} \}$$

تكون مثالية رئيسية في $\mathcal{H} [s]$ ، وهي المثالية (1) . ▲

ب. اثبت ان المجموعة

$$\{(s+2)q(s) + (s+4)h(s) : q(s), h(s) \in Z[s]\}$$

ليست مثالية رئيسية في $Z[s]$. اثبت أولا ان $s+2, s+4$ و 2 تكون كلها في المثالية.

رأينا انه في الحلقة Z تكون كل مثالية مثالية رئيسية .
وللحلقة التي بهذه الخاصية اسم خاص :

تعريف :

تكون الحلقة التبديلية التي لها عنصر محايد حلقة مثالية رئيسية اذا وفقط اذا كانت كل مثالية في H مثالية رئيسية.

وتبين المسألة ١٣ ان $Z[s]$ لا تكون حلقة مثالية رئيسية وسنثبت في المسألة ١٥ انه اذا كان q حقا كانت $q[s]$ حلقة مثالية رئيسية .

ولكي نبرهن هذه النتيجة على حلقات الحدوديات المعرفة على الحقل q ، نحتاج الى خوارزمية القسمة التالية للحدوديات :
(انظر التمرين ٣,٧ - ١١)

نظرية :

لتكن $(q, +, \cdot)$ حقا ولتكن

$q(s), h(s) \in q[s]$ بحيث ان $h(s) \neq 0$.

فيكون هناك حدوديتان $k(s), r(s) \in q[s]$ بحيث ان

$$q(s) = h(s)k(s) + r(s)$$

وان $r(s) = 0$ أو

$$\deg(r(s)) < \deg(h(s))$$

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن $(H, +, \cdot)$ حقا . فتكون $H[s]$ حلقة مثالية رئيسية . ولهذا ، اذا كانت $v \in H$

$[s]$ مثالية ، يكون هناك حدودية $d(s) \in H[s]$ بحيث ان $v = d(s)$ ($d(s) \in H$)

$$\{d(s)h(s) : h(s) \in H[s]\} =$$

تمارين :

- ١ - أثبت انه في $Z \in [S]$ تكون الحدوديتان s^{-2} ، s - s^{-4} عاملين في الحدودية s^{-2} س.
- ٢ - اعط مثالا على حدوديتين مختلفتين q (س) و h (س) في $Z \in [S]$ بحيث ان q (ه) = h (ه) لكل $h \in Z$. ان وجود هاتين الحدوديتين مضمون لانه يوجد عدد لا نهائي من الحدوديات في $Z \in [S]$ ولكن ——— اقترانات حدودية مختلفة.
- ٣ - اعط مثالا لحدودية في $Z [S]$ بالدرجة اثنين ، ذات عاملين صيغتهما $s + b$ في $Z [S]$ وليس لها اصفار في Z .
- ٤ - اثبت انه في الحدودية q (س) = s^2 في $Z [S]$ يكون الاقتران الحدودي q (ر) = r^2 له الاصفار 0 ، 2 ، 4 ، 6 ، وبعد ذلك اثبت انه يمكن تحليل الحدودية q (س) = s^2 في $Z [S]$ الى عوامل باربعة اشكال مختلفة .
- ٥ - كتوضيح للنظريتين ٦ و ٩ جد اصفار الاقترانيين الحدوديين q ، h :
 $Z [S] \leftarrow Z$ المعروفان بالصيغة
 q (ر) = $r^2 + r + 1$ و
 h (ر) = $r^2 + 1$
 جد العوامل s - للحدوديتين
 q (س) = $s^2 + s + 1$ و
 h (س) = $s^2 + 1$
- ٦ - لتكن $ج$ حلقة كاملة ، q (س) ، h (س) $\exists ج [S]$
 و q (س) = h (س) . اثبت انه اذا كانت q (س) = s^{-1} $ي$ (س)
 و h (س) = s^{-1} $ك$ (س) حيث $ي$ (س) ، h (س) $\exists ج [S]$ فان
 $ي$ (س) = $ك$ (س) .
- ٧ - ٢. لتكن $ج$ احدى الحلقات Z ، Q أو R ولتكن
 q (س) ، h (س) $\exists ج [S]$. اثبت ان الاقترانيين الحدوديين q و h يكونان
 متساويين اذا وفقط اذا كانت الحدوديتان q (س) و h (س) متساويتين . وبعبارة
 اخرى $ق$ (ر) = $ه$ (ر) لكل $ر \in ج$
 ($ح = Z$ ، Q ، R) اذا وفقط اذا كانت $ق$ (س) = $ه$ (س)
 ب. لماذا يفشل البرهان في الجزء ٢ للحدوديات على $Z \in [S]$ ؟
- ٨ - تعريف : لتكن (ل ، + ، ٠) حقلا ولتكن q (س) و h (س) حدوديتين في $ل [S]$ -
 { ٠ } تسم الحدودية $د$ (س) $\exists ل [S]$ القاسم المشترك الاعلى للحدوديتين q (س) اذا وفقط

إذا كان (١) د (س) تقسم كلا من قه (س) ، هـ (س) و (٢) إذا كانت ي (س) تقسم كلا من قه (س) و هـ (س) فان ي (س) تقسم د (س)
 ٩. جد القاسم المشترك الاعلى لكل زوج من الحدوديات التالية في Q [س] .

ق (س)	هـ (س)
$س^٢ - س^٢ + ٢س - ٢$	$س^٢ + ٢$
$س^٢ - س^٢ + ٢س - ٢$	$س^٢ - س^٢ - ٢س - ٤س + ٤$
$س^٤ - ٤$	$س^٣ - ١$

ب. هل يمكن ان يكون لحدوديتين اكثر من قاسم مشترك اعظم ؟ وضح .

*٩- برهن النظرية التالية بخصوص وجود قاسم مشترك اعلى لحدوديات على حقل :

نظرية :ليكن (ل ، + ، ٠) حقلا ولتكن قه (س) و هـ (س) حدوديتين في له [س] - {٠}.

فيكون للحدوديتين قه (س) و هـ (س) قاسم مشترك اعلى د (س) وزيادة على ذلك فيوجد ي (س) ، ك (س) له [س] بحيث ان
 د (س) = قه (س) ي (س) + هـ (س) ك (س) .

١٠- تعريف : لتكن ج حلقة تبديلية ذات عنصر محايد .

تكون الحدودية ي (س) $\exists$ ج [س] غير قابلة للاختزال اذا وفقط اذا تحقق الشرط التالي :
 للحدودية ي (س) درجة موجبة ، واذا كانت

ي (س) = ١ (س) ب (س) فان در (١ (س)) = ٠ أو
 در (ب (س)) = ٠ (اي اما ١ (س) أو ب (س) تكون حدودية ثابتة) .

٩. اعط عدة امثلة على حدوديات غير قابلة للاختزال في Z [س]
 ب. اعط مثالا على حدودية تكون غير قابلة للاختزال في Q [س] ولكنها قابلة للاختزال في R [س] .

*١١ برهن انه اذا كان (ل ، + ، ٠) حقلا وكانت ي (س) غير قابلة للاختزال في له (س) و ي (س) تقسم قه (س) حيث هـ (س) ، قه (س) $\exists$ له [س] ، فان ي (س) تقسم قه (س) أو
 ي (س) تقسم هـ (س) . ●

*١٢ لتكن (ج ، + ، ٠) حلقة تبديلية ذات عنصر محايد و ر $\exists$ ج . عرف اقترانا

$\phi : \mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{S}] \leftarrow \mathcal{C}$ بوضع

$$\phi((\mathcal{C}(\mathcal{S})) = (\mathcal{C}(\mathcal{R})) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{C}(\mathcal{S})^n}{n!}$$

$$\text{لكل حدودية } \mathcal{C}(\mathcal{S}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{C}(\mathcal{S})^n}{n!} = \mathcal{C}(\mathcal{S})$$

١. في $\mathcal{Z}[\mathcal{S}]$ جد $\phi((\mathcal{C}(\mathcal{S}))$ و $\phi((\mathcal{C}(\mathcal{S}))$

في الحالتين التاليتين : حيث $\mathcal{C}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}^3 - \mathcal{S}^2 - \mathcal{S} - 5$

وحيث $\mathcal{C}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}^4 - 16$

ب. ليكن $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ حلقة تبديلية ذات عنصر محايد و $\mathcal{C}$ ح.

برهن ان الاقتران ϕ المعروف اعلاه يكون اقتراناً محافظاً شاملاً من $\mathcal{C}[\mathcal{S}]$ الى $\mathcal{C}$.

ح. جد نواة ϕ .

١٣. كتطبيق للنظرية ٩ ، لبرهن النظرية التالية :

نظرية : لتكن $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ مجالا منتهياً . فتكون زمرة الضرب $\mathcal{C}^*$ - زمرة دورية.

١. برهن انه اذا كانت $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ زمرة منتهية تبديلية ذات عنصر محايد وبحيث انه

لكل معادلة $\mathcal{S}^n = 0$ ، و $n \in \mathcal{Z}^+$ ، ن من الحلول على الاكثر ، فتكون $\mathcal{S}$ زمرة

دورية ●

ب. برهن انه اذا كان $\mathcal{C}$ حقلاً منتهياً فان $(\mathcal{C}^*, +, \cdot)$ تكون زمرة دورية.

ح. بين ان $(\mathcal{Z}_n - \{0\}, +, \cdot)$ تكون زمرة دورية اذا _____ .

٥,٢ الحلقات الخارجة

لقد لاحظنا ان كل حلقة تكون اولا زمرة تبديلية بالنسبة للجمع . ولهذا فلأي حلقة جزئية للحلقة المعطاة هنالك زمرة خارجة بالنسبة للجمع . وسنناقش في هذا البند شروطاً يمكن اذا توافرت تعريف جداء لهذه الزمرة يجعلها حلقة .

اذا كانت $(\cdot, +, 0)$ حلقة و φ حلقة جزئية من $\mathcal{H}$ تكون φ زمرة جزئية طبيعية لزمرة الجمع $\mathcal{H}$.

ولهذا فان المجموعة $\mathcal{H}/\varphi$ المكونة من كل المجموعات المرافقة لـ φ تكون زمرة بالنسبة لعملية الجمع المعرفة بالصيغة :

$$(\varphi + \varphi) + (\varphi + \varphi) = (\varphi + \varphi) + (\varphi + \varphi) \text{ لكل } \varphi, \varphi \in \mathcal{H}.$$

تذكر الحقائق التالية بالنسبة الى $\mathcal{H}$.

١. اذا كانت $\varphi \in \mathcal{H}$ فتكون — هي المجموعة المرافقة في $\mathcal{H} / \varphi$ التي ينتمي اليها العنصر φ .

ب. لكل $\varphi, \varphi \in \mathcal{H}$ يكون $\varphi + \varphi = \varphi + \varphi$ اذا وفقط اذا — $\varphi \in \mathcal{H}$.

ج. يكون العنصر الصفري في $\mathcal{H} / \varphi$ هو المجموعة المرافقة — .

د. يكون العنصر ص φ اذا وفقط اذا كان ص $\varphi + \varphi =$ — .

بمثل تعريف جميع المجموعات المرافقة ، نعرف جداء اي عنصرين $\varphi + \varphi$ و $\varphi + \varphi$ للزمرة الخارجة $\mathcal{H} / \varphi$ بوضع:

$$(\varphi + \varphi) \cdot (\varphi + \varphi) = (\varphi + \varphi) + (\varphi + \varphi) .$$

وبذا فان «الجداء» لمجموعتين مترافقتين $\varphi + \varphi$ و $\varphi + \varphi$ هو المجموعة المرافقة

التي ينتمي اليها العنصر φ . في المسألة ١٨ نعين تلك الحلقات الجزئية φ من $\mathcal{H}$ التي

يكون فيها هذا الجداء معرّفاً تعريفاً حسناً (أي اذا كانت $\varphi + \varphi = \varphi + \varphi$)

و $\varphi + \varphi = \varphi + \varphi$ فان $(\varphi + \varphi) = (\varphi + \varphi) + (\varphi + \varphi)$.

مسألة :

تذكر ان الزمرة الخارجة $\mathcal{H} / \mathcal{H}$ بالنسبة للجمع تساوي الزمرة $\mathcal{H}$ وان الجداء عرف على $\mathcal{H}$ بوضع $\varphi \cdot \varphi =$ — لكل $\varphi, \varphi \in \mathcal{H}$ بين ان الجداء المعرف اعلاه للمجموعات المرافقة

يكون مشابهاً لهذا الجداء على $\mathcal{H}$ اي بين ان $(\varphi + \varphi) \cdot (\varphi + \varphi) = (\varphi + \varphi) + (\varphi + \varphi)$

$$(\varphi + \varphi) = \varphi + \varphi = (\varphi + \varphi)$$

نظرية :

لتكن

$$\{ \text{صه} = \left(\begin{array}{cc} ١ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{array} \right) : \text{ح} \in R \}$$

فتكون صه مثالية يمنى وليست مثالية من الجانبين في م_R .
برهن انه في حين ان :

$$\text{صه} + \left(\begin{array}{cc} ١ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{array} \right) = \text{صه} + \left(\begin{array}{cc} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{array} \right)$$

ان «الجداين»

$$\left[\text{صه} + \left(\begin{array}{cc} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{array} \right) \right] \cdot \left[\text{صه} + \left(\begin{array}{cc} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{array} \right) \right]$$

$$\left[\text{صه} + \left(\begin{array}{cc} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{array} \right) \right] \cdot \left[\text{صه} + \left(\begin{array}{cc} ١ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{array} \right) \right]$$

المعرفين اعلاه ليسا متساويين .

مسألة :

لتكن (ح ، + ، ·) حلقة ولتكن صه حلقة جزئية من ح .

لقد عرفنا جداء على ح / صه بوضع (٢ + صه) · (ب + صه) = (٢ب) + صه لكل ٢ ، ب ∈ ح .
برهن ان هذا الجداء يكون معرفاً تعريفاً حسناً على ح / صه اذا وفقط اذا كانت صه مثالية في ح .

والان وبعد ان وجدنا كل الحلقات الجزئية (وهي المثاليات) التي يكون فيها الجداء عملية ثنائية معرفة تعريفاً حسناً على الزمر الخارجة ، فلنبرهن انه بالنسبة لهذا الجداء تكون ح / صه حلقة اذا كانت صه مثالية .

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن $\mathcal{C}$ حلقة و $\mathcal{V}$ مثالية في $\mathcal{C}$. فتكون $(\mathcal{C} / \mathcal{V}, +, \cdot, 0)$ حلقة .
 لتكن $(\mathcal{C}, +, \cdot, 0)$ حلقة و $\mathcal{V}$ مثالية في $\mathcal{C}$. عرف $\mathcal{C} \twoheadrightarrow \mathcal{C} / \mathcal{V}$ بوضع
 $\mathcal{C} \twoheadrightarrow (\mathcal{C} / \mathcal{V}) = \mathcal{C} + \mathcal{V}$ لكل $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$.

سبق ان رأينا ان $\mathcal{C} \twoheadrightarrow \mathcal{C} / \mathcal{V}$ تكون اقتراناً زمرياً شاملاً من زمرة الجمع $\mathcal{C}$ الى زمرة الجمع $\mathcal{C} / \mathcal{V}$ (النظرية ٩٤ في الفصل ٢).
 ويسمى هذا الاقتران $\mathcal{C} \twoheadrightarrow \mathcal{C} / \mathcal{V}$ بالاقتران المحافظ القانوني .

مسألة :

بين ان الاقتران $\mathcal{C} \twoheadrightarrow \mathcal{C} / \mathcal{V}$ المعرف بالصيغة $\mathcal{C} \twoheadrightarrow (\mathcal{C} / \mathcal{V}) = \mathcal{C} + \mathcal{V}$ لكل $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ يكون اقتراناً محافظاً حقيقياً .
 لقد لاحظنا انه اذا كانت $\mathcal{C} \twoheadrightarrow \mathcal{C} / \mathcal{V}$ حلقيتين وكان $\mathcal{C} \twoheadrightarrow \mathcal{C} / \mathcal{V}$ اقتراناً محافظاً (حقيقياً) فان
 $\text{نو}(\mathcal{C} / \mathcal{V}) = \{ \mathcal{C} : \mathcal{C} \in \mathcal{C} \}$
 تكون مثالية في $\mathcal{C}$ ولهذا فيمكننا تكوين الحلقة الخارجة $\mathcal{C} / \text{نو}(\mathcal{C} / \mathcal{V})$. ونريد ان نقارن هذه
 الحلقة مع الحلقة $\mathcal{C} \twoheadrightarrow \mathcal{C} / \mathcal{V}$.

مسألة :

في الحلقيتين Z و Z لتكن $Z \twoheadrightarrow Z$ معرفة بوضع $\mathcal{C} \twoheadrightarrow (\mathcal{C} / \mathcal{V}) = \mathcal{C} + \mathcal{V}$ لكل $\mathcal{C} \in Z$. فتكون $\mathcal{C} \twoheadrightarrow \mathcal{C} / \mathcal{V}$ اقتراناً محافظاً (لماذا ؟)
 ويكون نو $(\mathcal{C} / \mathcal{V}) = \mathcal{C} + \mathcal{V}$ عرف اقتراناً
 $\mathcal{C} \twoheadrightarrow Z / \mathcal{V} = \mathcal{C} + \mathcal{V}$ بوضع $\mathcal{C} \twoheadrightarrow (\mathcal{C} / \mathcal{V}) = \mathcal{C} + \mathcal{V}$ لكل $\mathcal{C} \in Z$.
 لكل $\mathcal{C} \in Z$. بين ان $\mathcal{C} \twoheadrightarrow Z / \mathcal{V}$ تكون تشاكلاً بين حلقيتين . ابدأ بمقارنة هذا التعريف للاقتران $\mathcal{C} \twoheadrightarrow \mathcal{C} / \mathcal{V}$ مع
 التعريف المعطى في برهان نظرية التشاكل الاولى للزمر (النظرية ١٠١ في الفصل ٢) .

مسألة :

لتكن $(\mathcal{C}, +, \cdot, 0)$ و $(\mathcal{C} / \mathcal{V}, +, \cdot, 0)$ حلقيتين ولتكن $\mathcal{C} \twoheadrightarrow \mathcal{C} / \mathcal{V}$ اقتراناً محافظاً شاملاً من $\mathcal{C}$ الى $\mathcal{C} / \mathcal{V}$ ولتكن $\mathcal{V} = \text{نو}(\mathcal{C} / \mathcal{V})$. لقد لاحظنا ان $\mathcal{C} / \mathcal{V}$ تكون حلقة بالنسبة للعملية العادية للجمع والضرب في المجموعات المرافقة . عرف $\mathcal{C} \twoheadrightarrow \mathcal{C} / \mathcal{V}$ بوضع $\mathcal{C} \twoheadrightarrow (\mathcal{C} / \mathcal{V}) = \mathcal{C} + \mathcal{V}$ لكل $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$.

٢. اثبت فوراً ان $\bar{\phi}$ اقتران محافظ زمري معرف تعريفاً حسناً وهو واحد لواحد وشامل . كن حراً في استخدام النظرية ١٠١ في الفصل ٢ .

ب. برهن ان $\bar{\phi}$ اقتران محافظ حلقي .
ويمكن وضع المسألة ٢٢ على صيغة نظرية كما يلي :

نظرية :

نظرية التشاكل الاولى للحلقات : لتكن $(\cdot, +, \bar{c})$ و $(\cdot, +, c)$ حلقتين وليكن ϕ اقتراناً محافظاً شاملاً من c الى $\bar{c}$ ، فان $c / \bar{c}$ نو (ϕ) تكون متشاكلة مع $\bar{c}$.
ان الصورة الحافظة للحلقة c هي حلقة $\bar{c}$ بحيث يوجد اقتران محافظ شامل من c الى $\bar{c}$.
وتؤكد النظرية ٢٣ ان كل صورة محافظة لأي حلقة c تكون متشاكلة مع حلقة خارجة $c/\bar{c}$ لمثالية ما $\bar{c} \supseteq c$. ولهذا فان تلك الصورة المحافظة المختلفة (أي غير المتشاكلة) محتواة في حلقات خارجة $c/\bar{c}$ للحلقة c بواسطة مثالية $\bar{c}$.
ونعين في البندين ٥,٣ و ٥,٤ الشروط التي نضعها على المثالية $\bar{c}$ لكي تصبح الحلقة $c/\bar{c}$ حلقة كاملة او حقلاً .

تمارين :

- ١ . جد كل الحلقات الخارجة للحلقة Z بواسطة مثالية $\bar{c} \supseteq Z$.
- ٢ . اثبت ان الحلقات الخارجة لأي حقل L اثنتان هما $L / (0)$ و L / L .
صف كل الحلقات غير المتشاكلة التي يمكن ان تكون صوراً محافظة للحقل L . علل اجابتك .
- ٣* . برهن انه اذا كانت c حلقة ذات عنصر محايد وكانت $\bar{c}$ مثالية فعلاً في c ، فان $c/\bar{c}$ تكون حلقة ذات عنصر محايد .
- ٤* . برهن انه اذا كانت c حلقة تبديلية و $\bar{c}$ مثالية في c ، فان $c/\bar{c}$ تكون حلقة تبديلية .
- ٥ . جد كل الحلقات الخارجة للحلقة M (R) بواسطة مثالية $\bar{c} \supseteq M$ (R) . ●
- ٦ . لتكن c حلقة غير تافهة وليكن $\phi : M \rightarrow (R)$ اقتراناً محافظاً شاملاً من M الى (R) .
برهن ان c متشاكلة مع M (R) .
- ٧ . اذكر خصائص المجموعة المكونة من الاقترانات المحافظة من $(\cdot, +, Z)$ الى $(\cdot, +, Z)$.
- ٨ . عين كل الحلقات الخارجة الممكنة للحلقة Z بواسطة مثالية $\bar{c} \supseteq Z$.
- ٩* . لتكن $(\cdot, +, c)$ حلقة ذات عنصر محايد ، $\exists! c$.

٥,٣ المثاليات الأولية وحلقاتها الخارجية

وجدنا في البند السابق انه اذا كانت $\mathcal{H}$ حلقة و $\mathcal{V}$ حلقة جزئية فان الحلقة الخارجية $\mathcal{H} / \mathcal{V}$ تكون حلقة اذا وفقط اذا كانت $\mathcal{V}$ مثالية في $\mathcal{H}$. وبهذا امكنا معرفة خواص تلك الحلقات الجزئية التي لزمها الخارجية عملية ثنائية لضرب المجموعات المرافقة معرفة تعريفاً حسناً.

وفي هذا البند نتابع دراستنا لتعيين المثاليات حيث تكون الحلقة الخارجية لها حلقة كاملة.

تذكر ان الحلقة التبديلية $\mathcal{H}$ ذات عنصر محايد تكون حلقة كاملة اذا وفقط اذا كان لكل $\mathcal{P}$ ، $\mathcal{B}$ $\mathcal{H}$: اذا كان $\mathcal{A}\mathcal{B} = 0$ فان $0 = \mathcal{A}$ أو $0 = \mathcal{B}$.

مسألة :

لتكن $\mathcal{H}$ حلقة و $\mathcal{V}$ مثالية في $\mathcal{H}$ بحيث تكون $\mathcal{H} / \mathcal{V}$ حلقة كاملة .
١. اذا كانت $\mathcal{P}$ ، $\mathcal{B} \in \mathcal{H} / \mathcal{V}$ و

$$(\mathcal{P} + \mathcal{V}) \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{V}) = (0 + \mathcal{V})$$

$$\text{فان } \mathcal{P} + \mathcal{V} = 0 + \mathcal{V} \text{ أو } \mathcal{B} + \mathcal{V} = 0 + \mathcal{V} .$$

ب. بين ، مستعملاً خصائص المجموعات المرافقة ، انه اذا كانت $\mathcal{H} / \mathcal{V}$ حلقة كاملة ، $\mathcal{P}$ ، $\mathcal{B} \in \mathcal{H} / \mathcal{V}$ و $\mathcal{A}\mathcal{B} = 0 + \mathcal{V}$

فان $\mathcal{A} + \mathcal{V} = 0 + \mathcal{V}$ أو $\mathcal{B} + \mathcal{V} = 0 + \mathcal{V}$. وتعطي كل مثالية بهذه الخاصية اسماً خاصاً :

تعريف :

تكون اي مثالية $\mathcal{V} \neq \mathcal{H}$ في اي حلقة $\mathcal{H}$ مثالية اولية في $\mathcal{H}$ اذا وفقط اذا كان لكل $\mathcal{P}$ ، $\mathcal{B} \in \mathcal{H} / \mathcal{V}$ ، $\mathcal{A}\mathcal{B} = 0 + \mathcal{V}$ يتضمن ان $\mathcal{A} + \mathcal{V} = 0 + \mathcal{V}$ أو $\mathcal{B} + \mathcal{V} = 0 + \mathcal{V}$. ويكافئه ان المثالية $\mathcal{V} \neq \mathcal{H}$ في الحلقة $\mathcal{H}$ تكون مثالية اولية في $\mathcal{H}$ اذا وفقط اذا كان لكل $\mathcal{P}$ ، $\mathcal{B} \in \mathcal{H} / \mathcal{V}$ ، $\mathcal{A}\mathcal{B} = 0 + \mathcal{V}$ و $\mathcal{A} + \mathcal{V} \neq 0 + \mathcal{V}$ يتضمن $\mathcal{B} + \mathcal{V} = 0 + \mathcal{V}$.

مسألة :

عين هل كل من المثاليات التالية في $\mathbb{Z}$ مثالية اولية ام لا .
علل اجابتك .

١. $\mathcal{V} = \mathbb{Z} \cdot 6 = \{6r : r \in \mathbb{Z}\}$

ب. $\mathcal{V} = \mathbb{Z} \cdot 7 = \{7r : r \in \mathbb{Z}\}$

مسألة :

جد كل المثاليات الأولية في Z . علل اجابتك .
لقد رأينا في المسألة ٢٤ انه اذا كانت G حلقة و V مثالية في G بحيث تكون G/V حلقة كاملة فتكون V مثالية اولية . ولندرس الان معكوساً لذلك معدلاً ، لتكن G حلقة تبديلية ذات عنصر محايد و V مثالية اولية . فهل من الضروري ان تكون G/V حلقة كاملة ؟ لنعتبر الامثلة التالية :

مسألة :

- أ. هل تكون Z/V مثالية اولية في Z ؟
هل تكون Z/V حلقة كاملة ؟ (تذكر ان $Z/V \cong Z$ تساوي VZ . (انظر البند ٨، ٢).
ب. اختر مثالية اولية اخرى V في Z . فهل تكون Z/V حلقة كاملة ؟

مسألة :

اثبت النظرية التالية :

نظرية :

لتكن G حلقة تبديلية ذات عنصر محايد و V مثالية في G . فتكون G/V حلقة كاملة اذا وفقط اذا كانت V مثالية اولية في G . وكتطبيق للنظرية ٢٩ لناخذ مثالا في Z [س] ، وهي الحلقة المكونة من حدوديات على Z ، فالحلقة Z [س] حلقة تبديلية ذات عنصر محايد فالمجموعة

$$(S) = \{ (s) : (s) \subseteq (S) \text{ و } (s) \subseteq Z \text{ [س]} \}$$

مثالية في Z [س] . (لماذا ؟)

مسألة :

- أ. عرف اقتراناً $\phi : Z \text{ [س]} \rightarrow Z$ بوضع
 $\phi((s)) = (0) = 0$.

$$\text{لكل } (s) \in Z \text{ [س]} \quad \phi((s)) = \sum_{i=1}^n a_i s_i \text{ حيث } a_i \in Z \text{ و } s_i \in (s)$$

برهن ان ϕ اقتران محافظ شامل من Z [س] الى Z . جد نو (ϕ) .

ب. برهن ان Z [س] / (S) تكون حلقة كاملة ▲

ج. برهن ان (S) تكون مثالية اولية في Z [س] .

تمارين :

١ - برهن ان كل مثالية فعلا في Z تكون محتواة في مثالية اولية واحدة على الاقل . اعط عدة امثلة على ذلك .

٢* - ا. برهن انه اذا كانت $(ل، +، ٠)$ حقلا ، $ك (س)$ غير قابلة للاختزال فتكون المثالية

$$((ك (س)) = \{ ك (س) قه (س) : قه (س) \exists له [س] \}$$

التمرين ١، ٥ - ١٠ لتعريف الحدودية غير القابلة للاختزال .

ب. لتكن $له$ حقلا . برهن انه اذا كانت $هـ (س) \exists له [س]$ قابلة للاختزال فان المثالية

$$((هـ (س)) = \{ هـ (س) قه (س) : قه (س) \exists له [س] \}$$

تكون محتواة في مثالية اولية ولا تكون هي نفسها مثالية اولية .

٣ - برهن انه اذا كانت $(ح، +، ٠)$ حلقة كاملة و $ا \exists ح$ فان المثالية

$$((س - ا) = \{ (س - ا) قه (س) : قه (س) \exists له [س] \}$$

تكون مثالية اولية في $ح [س]$.

٤* - عين هل المثاليات التالية مثاليات اولية في الحلقة $ح$ المعطاة ام لا :

$$ا. ح = Q [س] ، ص = \{ (س - ٢) قه (س) : قه (س) \exists Q [س] \}$$

$$ب. ح = R [س] ، صه = \{ (س - ٢) قه (س) : قه (س) \exists R [س] \}$$

$$ح = Q [س] ، صه = \{ (س قه (س) + ٣ هـ (س) : قه (س) ، هـ (س) \exists Q [س] \}$$

٥,٤ المثاليات القصوى وحلقاتها الخارجة

لقد اثبتنا انه لاي حلقة تبديلية $\mathcal{H}$ ذات عنصر محايد ومثالية $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{H}$ تكون الحلقة الخارجة $\mathcal{H}/\mathcal{H}$ حلقة كاملة اذا وفقط اذا كانت $\mathcal{H}$ مثالية اولية في $\mathcal{H}$. ونرغب الآن في تعيين الشرط الضروري لكي تكون $\mathcal{H}/\mathcal{H}$ حقلاً.

اذا كانت $\mathcal{H}$ حلقة تبديلية ذات عنصر محايد، فان الحلقة الخارجة $\mathcal{H}/\mathcal{H}$ تكون حلقة تبديلية ذات عنصر محايد $1 + \mathcal{H}$. في هذه الحالة نحتاج لتعيين الشرط الضروري والكافي لكي يكون لكل عنصر $2 + \mathcal{H} \neq 0 + \mathcal{H}$ ص نظير ضربى. ويعتمد وجود النظير الضربى في $\mathcal{H}/\mathcal{H}$ على $\mathcal{H}$ التي يجب ان تكون نوعاً خاصاً من المثاليات تدعى مثالية «قصوى».

تعريف :

تكون اي مثالية $\mathcal{H}$ في اي حلقة $\mathcal{H}$ مثالية قصوى في $\mathcal{H}$ اذا وفقط اذا كان :

١. $\mathcal{H} \neq \mathcal{H}$ ،

ب. لا توجد مثالية $\mathcal{H}$ في $\mathcal{H}$ بحيث ان $\mathcal{H} \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}$ (احتواء فعلي).

لاحظ ان الشرط ب من التعريف ٣١ يقول انه لا يمكن وضع مثالية $\mathcal{H}$ بالضبط بين المثالية $\mathcal{H}$ والحلقة $\mathcal{H}$. وهناك عدة صيغ مفيدة لهذا الشرط. فلتكن $\mathcal{H}$ حلقة و $\mathcal{H}$ مثالية في $\mathcal{H}$ بحيث ان $\mathcal{H} \neq \mathcal{H}$. فنكون العبارات التالية مكافئة للشرط ب في تعريف المثالية القصوى :

ب٠. اذا كانت $\mathcal{H}$ مثالية في $\mathcal{H}$ و $\mathcal{H} \supset \mathcal{H}$ ، $\mathcal{H} = \mathcal{H}$ ، فان $\mathcal{H} = \mathcal{H}$.

ب١. اذا كانت $\mathcal{H}$ مثالية في $\mathcal{H}$ و $\mathcal{H} \supset \mathcal{H}$ ، $\mathcal{H} \supset \mathcal{H}$ ، فان $\mathcal{H} = \mathcal{H}$ أو $\mathcal{H} = \mathcal{H}$.

(ويمكن ان تساعدنا مخططات ثين في ملاحظة تكافؤ هذه العبارات).

مسألة :

جد كل المثاليات للحلقة $\mathbb{Z}_n$. عين هل كل من هذه المثاليات مثالية قصوى ام لا.

مسألة :

١. هل تكون $\mathbb{Z}$ مثالية قصوى في $\mathbb{Z}$ ؟

هل تكون $\mathbb{Z} / \mathbb{Z}$ حقلاً ؟ تذكر ان $\mathbb{Z} / \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

ب. هل تكون $\mathbb{Z}_5$ مثالية قصوى في $\mathbb{Z}$ ؟ هل تكون $\mathbb{Z}_5 / \mathbb{Z}$ حقلاً ؟

تذكر انه اذا كانت $\mathcal{H}$ حقلاً، فان $\mathcal{H}$ ليس لها مثاليات فعلية (اي، اذا كانت $\mathcal{H}$ مثالية

في $\mathcal{H}$ ، فان $\mathcal{H} = \{0\}$ أو $\mathcal{H} = \mathcal{H}$).

(انظر المسألة ٦١ ٢ في الفصل ٣).

وبالإضافة لهذه الخاصية للحقول ، نحتاج للتمهيدية التالية :

تمهيدية :

لتكن $\mathcal{H}$ حلقة و $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ مثاليتين في $\mathcal{H}$ بحيث ان $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ ، فان المجموعة

$$\mathcal{W} / \mathcal{V} = \{ \mathcal{V} + \mathcal{P} : \mathcal{P} \in \mathcal{W} \}$$

تكون مثالية في $\mathcal{H} / \mathcal{V}$.

اترك برهان هذه التمهيدية للتمرين ٤ .

والنظرية التالية تعطينا شرطاً ضرورياً لكي تكون اي حلقة خارجة حقلاً .

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن $\mathcal{H}$ حلقة و $\mathcal{V}$ مثالية في $\mathcal{H}$ بحيث ان $\mathcal{H} / \mathcal{V}$ تكون حقلاً . فان $\mathcal{V}$ تكون مثالية قصوى في $\mathcal{H}$.

لا يمكننا ان نبرهن عكس النظرية ٣٥ لانه اذا لم تكن $\mathcal{H}$ تبديلية او اذا لم يكن في $\mathcal{H}$ عنصر محايد ، فليس من الضروري ان تكون $\mathcal{H} / \mathcal{V}$ حلقة تبديلية ذات عنصر محايد . وفي تلك الحالة لا تكون حقلاً حتماً . ولكن لدينا للحلقات التبديلية ذات العنصر المحايد النظرية التالية :

نظرية :

لتكن $\mathcal{H}$ حلقة تبديلية ذات عنصر محايد و $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{H}$ مثالية . فان $\mathcal{H} / \mathcal{V}$ تكون حقلاً اذا وفقط اذا كانت $\mathcal{V}$ مثالية قصوى .

لاحظ ان احدى المتضمنات في النظرية ٣٦ محتواة في النظرية ٣٥ .

برهن صحة الشرط في النظرية بحل المسألة التالية :

مسألة :

لتكن $\mathcal{H}$ حلقة تبديلية ذات عنصر محايد . افترض ان $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{H}$ مثالية قصوى في $\mathcal{H}$ ، وفي $\mathcal{H} / \mathcal{V}$ لتكن $1 + \mathcal{V} \neq 0 + \mathcal{V}$ فيجب ان نجد نظيراً ضربياً للعنصر $1 + \mathcal{V}$ (اي عنصر $r + \mathcal{V}$ بحيث ان $(1 + \mathcal{V})(r + \mathcal{V}) = 1 + \mathcal{V}$) .
لنأخذ المجموعة

$$\{ (r + s) : r \in H, s \in H \} = H$$

$$\{ r + s : r \in H, s \in H \} =$$

فتكون H محتواة في H/H . ونرغب في نبهن ان $1 + s \in H$. (لماذا ؟) لاحظ انه اذا كان

١١ : H/H — H/H اقتنائاً محافظاً قانونياً معرفاً بوضع
١٢ : $(1) = 1 + s$ لكل $s \in H$ فتكون H الصورة للمجموعة

$$\{ (r + s) : r \in H, s \in H \} = H$$

$$= 1 + s \quad (\text{لماذا ؟})$$

٢. برهن ان H تكون مثالية في H .
- ب. برهن ان H تكون مجموعة جزئية فعلا من H .
- ج. برهن ان $H = H/H$ و $H/H = H/H$.
- د. اثبت ان $1 + s$ لها نظير ضربى في H/H .

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

اذا كانت H حلقة تبديلية ذات عنصر محايد و H مثالية قصوى في H فتكون H مثالية اولية في H .
ان عكس النظرية ٢٨ غير صحيح . وفي التمرين ٧ مثال في Z [س] لمثالية اولية ليست مثالية قصوى .

تمارين :

١. جد كل المثاليات القصوى في Z . تذكر انها يجب ان تكون مثاليات اولية.
٢. ١. جد كل المثاليات الفعلية في Z . اذا كانت $n = d$ حيث $d \leq 2$ ، عدداً اولياً . (جرب $n = 4, 8$ أولاً) .
- ب. جد كل المثاليات الاولى والقصوى في Z اذا كانت $n = d$ ، حيث $d \leq 2$ عدداً اولياً.
٢. ٢. بين انه اذا كانت $H = Z^2$ المجموعة المكونة من كل الاعداد الصحيحة الزوجية و

$$\{z^2 : \exists z\} = \text{صه}$$

فتكون صه مثالية قصوى في ج ليست مثالية اولية في ج.

ب. هل النظرية ٢٨ صحيحة لحلقة تبديلية بدون عنصر محايد ؟

٤ - برهن التمهيدية ٣٤ .

٥ - بين انه اذا كانت له حقلا و $\exists^2$ له فان الحقل

$$\{(s - 1) : (s - 1) \text{ ق } (s) : \text{ق } (s) \exists^2 \text{ له } [s]\} = (s - 1)$$

يكون مثالية قصوى في له [س] .

٦ - بين انه اذا كانت له حقلا و هـ (س) $\exists^2$ له [س] تقبل القسمة على ك (س) حيث
در (ك (س)) ١

فان المثالية

$$\{(s - 1) : (s - 1) \text{ ق } (s) : \text{ق } (s) \exists^2 \text{ له } [s]\} = (s - 1)$$

ليست مثالية قصوى في له [س] .

٧ - عرف اقترانا $\phi : Z \rightarrow [s]$ بوضع

$$\left\{ \begin{array}{l} z^2 \exists^2 \text{ له } [s] \text{ اذا كانت } z^2 \exists^2 \text{ له } [s] \\ z^2 \exists^2 \text{ له } [s] \text{ اذا كانت } z^2 \exists^2 \text{ له } [s] \end{array} \right\} = \sum_{r=1}^n \phi$$

$$\sum_{r=1}^n \phi \text{ لكل حدودية } z^2 \exists^2 \text{ له } [s] .$$

برهن ان ϕ اقتران محافظ شامل من Z [س] الى Z .

ب. بين ان نو $(\phi) = \{z^2 + s^2 : (s) \text{ ق } z^2 \exists^2 \text{ له } [s], \text{ق } (s) \exists^2 \text{ له } [s]\}$

جـ لتكن صه = نو (ϕ) . بين ان صه تكون مثالية قصوى في Z [س] .

د. بين ان المثالية

$$(s) = \{(s) \text{ ق } z^2 \exists^2 \text{ له } [s]\}$$

● مثالية اولية وليست مثالية قصوى في Z [س] .

٨ - لتكن h حقلا . لاحظنا في التمرين ٥,٣ - ٢ انه اذا كانت K (س) $\exists h$ [س] غير قابلة للاختزال ، فان المتتالية :

(ك (س)) = { ك (س) قه (س) : قه (س) $\exists h$ [س] } تكون مثالية اولية في h [س] .

٩ - عين هل كل من المثاليات التالية مثاليات قصوى في الحلقة المعطاة ام لا ؟

أ. $Q = h$ [س] ، $\{ (s - s^2) qh (s) \exists Q [s] \} = \emptyset$

ب. $R = h$ [س] ، $\{ (s - s^2) qh (s) \exists R [s] \} = \emptyset$

ج. $Q = h$ [س] ، $\{ (s + s^2) qh (s) : قه (س) ، هـ (س) \exists Q [س] \} = \emptyset$

٥,٥ المثاليات القصوى في حلقات الاقتران

يتعلم الطالب في التفاضل والتكامل ان الاقتران q المعروف على الفترة المغلقة $[0, 1]$ يكون متصلاً عند f . $[0, 1] \ni$ اذا فقط اذا كانت نها q (س) = q (٢).
 $\leftarrow P$

ويكون الاقتران q متصلاً على الفترة $[0, 1]$ اذا فقط اذا كان متصلاً عند كل نقطة في الفترة $[0, 1]$.

ولقد رأينا امثلة على حلقات من اقترانات في التمرين ٣,١ - ٦ وفي هذا البند نوضح احدى الروابط بين التحليل والجبر المجرد ونبرهن ان مجموعة الاقترانات المتصلة على الفترة $[0, 1]$ تكون حلقة ونرى بعض مثالياتها القصوى.

مسألة :

اي من الاقترانات التالية تكون متصلة عند النقطة $f = \frac{1}{3}$ ؟ خطط رسماً بيانياً لكل اقتران واحفظها لاستعمالات قادمة .

$$٢. \quad q(s) = s^2 \text{ حيث } 0 \leq s \leq 1$$

$$ب. \quad q(s) = \begin{cases} 1 - s^2 & \text{اذا كانت } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{اذا كانت } \frac{1}{2} < s \leq 1 \end{cases}$$

$$ج. \quad q(s) = \begin{cases} 1 - s^2 & \text{اذا كانت } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{اذا كانت } \frac{1}{2} < s \leq 1 \end{cases}$$

$$د. \quad q(s) = \begin{cases} 0 & \text{اذا كانت } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 1 - s^2 & \text{اذا كانت } \frac{1}{2} < s \leq 1 \end{cases}$$

اذا كان $q: [0, 1] \rightarrow R$ و $h: [0, 1] \rightarrow R$

اقتراين مجموعهما ، $q + h$ ، وحاصل ضربهما ، qh ، يعرفان على الفترة $[0, 1]$ بوضع
 $(q + h)(s) = q(s) + h(s)$ و $(qh)(s) = q(s)h(s)$ حيث $s \in [0, 1]$.

ونعلم من التفاضل والتكامل انه اذا كان q و h اقتراين متصلين على الفترة $[0, 1]$ فيكون

الاقتترانات $ق + هـ$ و $ق - هـ$ متصلين ايضاً على $[١, ٠]$. ولهذا فان المجموعة المكونة من كل الاقتترانات المتصلة على $[١, ٠]$ تكون مغلقة بالنسبة للجمع والضرب المعرفين اعلاه . ويعطينا هذا البداية للحلقة التي سندرسها الآن.

تعريف :

لتكن $م [١, ٠]$ المجموعة المكونة من كل الاقتترانات المتصلة $ق : [١, ٠] \leftarrow R$. فلكل $ق$ ، $هـ م [١, ٠]$ يعرف حاصل الجمع ، $ق + هـ$ ، وحاصل الضرب ، $ق \cdot هـ$ كالآتي :

$$(ق + هـ) (س) = ق (س) + هـ (س) , (ق \cdot هـ) (س) = ق (س) \cdot هـ (س) \text{ حيث } س \in [١, ٠] .$$

تعريف

تكون المجموعة $م [١, ٠]$ المكونة من كل الاقتترانات المتصلة $ق : [١, ٠] \leftarrow R$ مع عمليتي الجمع والضرب نقطة نقطة ، حلقة تبديلية ذات عنصر محايد .
ان جزء من برهان النظرية ٤١ محتوى في المسألة التالية :

مسألة :

١. جد العنصر المحايد (العنصر الصفري للحلقة) الجمعي ، والعنصر المحايد الضربي . تذكر ان هذين يجب ان يكونا اقتترانين من $[١, ٠]$ الى R .
 - ب. جد النظير الجمعي للاقتتران $ق \in م [١, ٠]$
 - حـ برهن ان الضرب يكون توزيعياً على الجمع في $م [١, ٠]$.
ويترك باقي برهان النظرية ٤١ للتمرين ١.
- تذكر انه في الاقتترانات $ق$ ، $ق_١$ ، $ق_٢$ المعرفة على الفترة $[١, ٠]$ يكون $ق = ق_١$ اذا فقط اذا كان $ق (س) = ق_١ (س)$ لكل $س \in [١, ٠]$. ولهذا فان $ق \neq ق_٢$ اذا فقط اذا كان $ق (س) \neq ق_٢ (س)$ لحدى قيم $س \in [١, ٠]$ على الاقل .
- نقول ان الاقتتران $ق : [١, ٠] \leftarrow R$ غير صفري اذا وفقط اذا وجدت نقطة $٢.١ \in [١, ٠]$ بحيث ان $ق (٢.١) \neq ٠$. وتعطينا المسألة ٣٩ أمثلة على اقتترانات غير صفرية في $م [١, ٠]$.
١] تتضمن على الاقل واحداً قيمته صفر على فترة جزئية ومع ذلك فهو اقتتران غير صفري .

مسألة :

برهن ان الحلقة (م $[١, ٠]$ ، + ، $\cdot$) لا تكون حلقة كاملة.
ولعمل ذلك جد اقتترانين غير صفريين $ق$ ، $هـ$ $\in م [١, ٠]$ بحيث ان $ق + هـ = ٠$ ويمكن ان تكون النظريتان التاليتان مفيدتين في المسائل ٤٥ حتى ٥٠ . وقد برهننا في بنود سابقة.

تعريف :

ثبت $\hookrightarrow [1, 0]$ وعرف اقتراناً

$\phi_m : [1, 0] \longleftarrow R$

بوضع

$\phi_m(q) = q(\hookrightarrow)$

لكل $q \in [1, 0]$

مسألة :

ضع $\hookrightarrow = \frac{1}{4}$. ولتكن q و h اقترانين معرفين على $[1, 0]$ بالصيغة $q(s) = s^2 - \frac{1}{16}$ و $h(s) = s$ ، على الترتيب . جد $\phi_m(q)$ ، $\phi_m(h)$ ، $\phi_m(q + h)$ و $\phi_m(q \cdot h)$

مسألة :

- بين ان الاقتران $\phi_m : [1, 0] \longleftarrow R$ المعطى في التعريف ٤٤ هو اقتران محافظ حلقي شامل من $[1, 0]$ الى R .
- صف كل العناصر $k \in \text{نو}(\phi_m)$. خطط بيان عدة اقترانات في $\text{نو}(\phi_m)$.
- برهن ان $[1, 0] / \text{نو}(\phi_m)$ تكون متشاكلة مع R .
- برهن ان $\text{نو}(\phi_m)$ مثالية قصوى في $m(1, 0)$.

مسألة :

- برهن انه اذا كانت $\hookrightarrow [1, 0]$ ثابتة . و
- $$\text{سم} = \{q : q \in [1, 0] \text{ و } q(\hookrightarrow) = 0\}$$
- فان سم تكون مثالية قصوى في $m(1, 0)$.
- لقد لاحظنا في المسألتين ٤٦ و ٤٧ انه يوجد عدد كبير من المثاليات القصوى في الحلقة $m(1, 0)$.
- ونبين في المسألة ٤٨ ان لكل فترة جزئية $[d, \hookrightarrow]$ من $[1, 0]$ توجد مثالية فعلا في $m(1, 0)$.

مسألة :

- ليكن $\hookrightarrow > d > r > 1$. ضع
- $$\text{صه} = \{q : q \in [1, 0] , q(s) = 0 \text{ حيث } s \in [d, \hookrightarrow]\}$$
١. بين ان صه تكون مثالية في $m(1, 0)$ جد اقتراناً غير صفري $q \in [1, 0]$ بحيث

- يكون في صه ، واقتراًنا هـ $\exists$ م $[1, 0]$ بحيث لا يكون في صه .
- ب. اذا كانت س $\exists$ [د ، ح] جد علاقة بين صه و سهـ .
- حـ هل تكون صه مثالية اولية في م $[1, 0]$ ؟ علل اجابتك .
- د. اذا كانت ϕ اقتتران تقييم نقطي محافظ من النوع المعطى في التعريف ٤٤ فان نو (ϕ) تكون مثالية قصوى في م $[1, 0]$. ولنبرهن الآن ان النواة لاي اقتتران محافظ شامل من م $[1, 0]$ الى R ، تكون مثالية قصوى .

مسألة :

برهن انه اذا كان ϕ اقتتراناً محافظاً شاملاً من م $[1, 0]$ الى R فان نو (ϕ) تكون مثالية قصوى .

من الممكن باستعمال بعض نظريات التحليل (التي تدرس بعد مساق التفاضل والتكامل) ، اثبات انه اذا كانت سهـ مثالية قصوى في م $[1, 0]$ ، فانه يوجد حـ $\exists$ $[1, 0]$ بحيث ان

$$\text{سهـ} = \text{سهـ} = \{ \text{قه} : \text{قه} \exists \text{ م } [1, 0], \text{ قه} (\text{حـ}) \}$$

ولهذا تتكون المثاليات القصوى في م $[1, 0]$ ، بالضبط من تلك المثاليات لاقتترانات تتلاشى عند نقطة معطاة.

مسألة :

افترض ان كل مثالية قصوى سهـ في م $[1, 0]$ تأخذ الصيغة سهـ = سهـ لبعض قيم حـ $\exists$ $[1, 0]$. ولتكن ϕ اقتتراناً شاملاً من م $[1, 0]$ الى R ، مع خاصية اضافية هي ان

$$\phi (\text{قه}) = \phi (\text{قه}) \text{ لكل } \text{قه} \exists R \text{ و } \text{قه} \exists \text{ م } [1, 0] , \text{ حيث ان } \text{ق} \text{ اقتتران معرف على } [1, 0] ,$$

بالصيغة $(\text{ق}^2) = (\text{س})$. برهن انه لاي اقتتران ثابت هـ ذي القيمة ١ نحصل على $\phi (\text{قه}) = \text{قه} (\text{هـ})$ لكل قه $\exists \text{ م } [1, 0]$. ولهذا فان كل اقتتران محافظ شامل له هذه الخاصية من م $[1, 0]$ الى R يعطى بالتقييم عند نقطة في الفترة $[1, 0]$.

تمارين :

- ١ . اكمل برهان النظرية ٤١ .
- ٢ . لتكن م $[1, 0]$ المجموعة المكونة من كل الاقتترانات المتصلة قه : $[1, 0] \leftarrow R$ بحيث ان المشتقة الاولى قه للاقتتران قه موجودة ومتصلة على الفترة $[1, 0]$. اثبت ان م $[1, 0]$ حلقة جزئية فعلاً من $[1, 0]$.
- ٣ . لتكن م $[1, 0]$ المجموعة المعرفة في التمرين ٢ . ثبت حـ $\exists$ $[1, 0]$.

وضع سهـ = { قه : $\exists$ م $[1, 0]$ وق (حـ) = } .

١. برهن ان سهم تكون مثالية قصوى في $\text{م} [1, 0]$.
- ب. جد اقتراناً غير صفري $\text{هـ} \ni \text{م} [1, 0]$ بحيث ان $\text{هـ} = 0$ و $\text{هـ} \ni \text{م} [1, 0]$
- ح. بين ان المجموعة سهم تختلف عن المثالية القصوى سهم في $\text{م} [1, 0]$ وان $\text{سهم} = \text{سهم} \cap \text{م} [1, 0]$
٤. لتكن $\text{م} [1, 0]$ الحلقة المعرفة في التمرين ٢. ثبت $\text{ح} \ni \text{م} [1, 0]$.
- وضع $\text{صهم} = \{ \text{قـ} : \text{قـ} \ni \text{م} [1, 0], \text{قـ} (\text{ح}) = \text{قـ} (\text{ح}) = 0 \}$
١. برهن ان صهم تكون مثالية في $\text{م} [1, 0]$.
- ب. هل تكون صهم مثالية اولية في $\text{م} [1, 0]$ ؟ مثالية قصوى ؟
٥. ثبت $\text{ح} \ni \text{م} [1, 0]$ ولتكن $\text{م} [1, 0]$ الحلقة المعرفة في التمرين ٢.
- عرف $\text{لـ} : \text{م} [1, 0] \rightarrow R$ بوضع $\text{لـ} (\text{قـ}) = \text{قـ} (\text{ح})$ لكل $\text{قـ} \ni \text{م} [1, 0]$.
١. هل تكون لـ اقتراناً محافظاً زمرياً شاملاً من $(\text{م} [1, 0], +)$ الى $(R, +)$ ؟
- ب. هل تكون لـ اقتراناً محافظاً حلقياً شاملاً من $\text{م} [1, 0]$ الى R ؟
٦. عرف $\psi : \text{م} [1, 0] \rightarrow R$ بوضع $\psi (\text{قـ}) = \{ \text{قـ} (\text{س}) \text{ دس لكل } \text{قـ} \ni \text{م} [1, 0] \}$.
١. هل تكون ψ اقتراناً محافظاً شاملاً زمرياً من $(\text{م} [1, 0], +)$ الى $(R, +)$ ؟
- ب. هل تكون ψ اقتراناً محافظاً شاملاً حلقياً من $\text{م} [1, 0]$ الى R ؟
٧. عرف اقتلانا $\text{د} : \text{م} [1, 0] \rightarrow [1, 0]$ حيث $\text{م} [1, 0]$ هي الحلقة المعرفة في التمرين ٢، بوضع $\text{د} (\text{قـ}) = \text{قـ}$ لكل $\text{قـ} \ni \text{م} [1, 0]$.
١. بين ان د اقتران محافظ زمري شامل من $(\text{م} [1, 0], +)$ الى $(\text{م} [1, 0], +)$.
- ب. هل د اقتران محافظ حلقى شامل من $\text{م} [1, 0]$ الى $\text{م} [1, 0]$ ؟

مراجعة

عبارات هامة

الصورة المحافظة لحلقة	اقتران حدودي
مثالية اولية	عامل حدودي
مثالية قصوى	
حلقة من اقترانات متصلة	صفر اقتزان حدودي
	مثالية رئيسية
قاسم مشترك أعظم لحدوديات	حلقة مثالية رئيسية
حدودية غير قابلة للاختزال	حلقة خارجة
	اقتزان محاقظ قانوني

رموز

$$\begin{aligned} (٢) \quad \emptyset &= (ق) = (ح) \\ &\text{س} \\ &\text{ص} \\ &[١, ٠] \end{aligned}$$

اسئلة

- ١ - اذكر نظرية تربط عوامل صيغتها س - ٢ مع اصفار حدودية على حلقة تبديلية ذات عنصر محايد .
- ٢ - لتكن $\mathcal{H}$ حلقة كاملة . ما اكبر عدد من الاصفار للحدودية $ق(س) \in \mathcal{H}$ ذات الدرجة ن ؟
ما اكبر عدد من للعوامل س - ٢ ($\mathcal{H} \in \mathcal{H}$) في $ق(س) \in \mathcal{H}$ [س] اذا كانت درجة $ق(س)$ هي ن ؟
اذا لم تكن $\mathcal{H}$ حلقة كاملة ، فهل من الممكن ان يكون عدد الاصفار او العوامل في الحدودية $\mathcal{H}$ [س] هو هذا العدد الاكبر المذكور ؟

- ٣ - ما هي خوارزمية القسمة للحدوديات على حقل ؟
- ٤ - لاي انواع الحلقات الجزئية صم من الحلقة ج يكون الضرب عملية ثنائية على ج / صم معرفاً تعريفاً حسناً ؟
- إذا كانت ج- حلقة تبديلية ذات عنصر محايد ، فلأي نوع من الحلقات الجزئية من ج- تكون ج- / صم حلقة كاملة ؟ حقلا ؟
- ٥ - اعط مثالين على حلقة مثالية رئيسية . اعط مثالا لحلقة من حدوديات بحيث لا تكون حلقة مثالية رئيسية .
- ٦ - اذكر نظرية التشاكل الاولى للحلقات ووضح كيف تستعملها لايجاد حلقات غير متشاكله تكون صوراً محافظة للحلقة المعطاة.
- ٧ - هل كل مثالية قصوى هي مثالية اولية تبديلية ذات عنصر محايد ؟
هل كل مثالية اولية هي مثالية قصوى في حلقة تبديلية ذات عنصر محايد ؟
- ٨ - كيف تعرف الجمع والضرب على م [٠ و ١] ؟ هل تكون (م [٠ ، ١] ، + ، ٠) حلقة ؟ حلقة تبديلية ذات عنصر محايد ؟ حلقة كاملة ؟ حقلا ؟
- ٩ - صف صفاً من الاقترانات المحافظة الشاملة من م [٠ ، ١] الى R . صف صفاً من المثاليات القصوى ترتبط بهذه الاقترانات المحافظة . هل يوجد اي انواع اخرى من الاقترانات المحافظة او المثاليات القصوى في م [٠ ، ١] ؟
ان المسائل التالية اجيب عليها في التمارين .
- ١٠ - لتكن ق (س) ، هـ (س) د جـ [س] ، حيث جـ حلقة تبديلية ذات عنصر محايد ، وافترض ان
ق (ر) = هـ (ر) لكل ر د جـ فهل من الضروري ان يكون صحيحاً ان ق (س) = هـ (س) ؟ لاي الحلقات يكون صحيحاً ان ق (ر) = هـ (ر) لكل ر د جـ يقتضي ان ق (س) = هـ (س) ؟
- ١١ - ماذا يعني القاسم المشترك الاعظم لحدوديتين غير صفريتين على حقل قاسم مشترك أعظم غير صفريتين على حقل قاسم مشترك أعظم هل من الضروري أن يكون لحدوديتين

- ١٢ ما هي الحدودية غير القابلة للاختزال في جـ [س] ؟ اذا كانت لحقلا و ك (س) د لـ [س] غير قابلة للاختزال ، فهل تكون المثالية (ك (س)) مثالية اولية ؟ مثالية قصوى ؟
- ١٣ - ما هي بعض المثاليات في م [٠ ، ١] ؟ هل تكون ايضاً مثاليات في م [٠ ، ١]

الملاحق ١

المجموعات

الرموز المألوفة التالية من نظرية المجموعات مستعملة خلال هذا الكتاب

الرمز	معناه
$s \ni s$	س عنصر في المجموعة س
$s \notin s$	س ليست عنصر في س
$\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$	المجموعة التي عناصرها $s_1, s_2, \dots, s_n$
$\{s : (s) \in\}$	المجموعة المكونة من كل عناصر س التي تكون فيها
ϕ	العبارة (س) صحيحة
$s \cup s$ (اتحاد)	المجموعة الخالية ، المجموعة الخالية من العناصر
$s \cap s$ (تقاطع)	المجموعة المكونة من كل العناصر التي تنتمي الى س أو س معاً
$s - s$ (فرق)	وكلية
$s \supseteq s$ (احتواء)	المجموعة المكونة من كل العناصر التي تنتمي الى س
$s = s$	ولكن ليست في س
$s \neq s$	س مجموعة جزئية من س : كل عنصر في س هو ايضاً عنصر في س
$s \supset s$	س $\supseteq$ س و س $\supseteq$ س المجموعتان س و س لهما نفس العناصر
$s \neq s$	س - س $\neq \phi$ أو س - س $\neq \phi$ أو كلاهما
$s \supset s$ (متضمنة فعلاً)	س مجموعة جزئية من س و س $\neq \phi$
$s \times s$ (الجداء الديكارتي)	المجموعة المكونة من كل الأزواج المرتبة
$s \cap s = \phi$	(س ، ب) حيث ان $s \ni s$ و $s \ni s$
	المجموعتان س و س منفصلتان

الملحق ٢

المنطق وطرق البرهان

١. المنطق

تكتب معظم الرياضيات على صيغة فرضيات ، وهي عبارات تكون اما صائبة او خطأ ولا تكون كليهما . ويمكن ان تضم عبارات بسيطة معاً بطرق عدة لتكوين عبارات مركبة ، وهذه تكون صائبة او خطأ على حسب صواب او خطأ العبارات البسيطة التي تتكون منها .
فالعبرة المركبة «ف و ن» تكون صائبة اذاً فقط اذا كانت ف و ن صائبتين معاً . وتكون خطأ اذا كانت ف خطأ أو ن خطأ أو كلا ف و ن خطأ.
ويمكن بيان هذه العلاقات بالتحديد كما في الجدول ١ ، ويسمى (جدول الصواب) للعبرة «ف و ن»

الجدول ١	ف	ن	ف و ن
ص	ص	ص	ص
ص	ص	خ	خ
خ	ص	ص	خ
خ	خ	خ	خ

والعبرة المركبة « ف أو ن » تكون صائبة اذا كانت ف صائبة او كانت ن صائبة أو كانت كلاهما صائبتين وتكون خطأ اذا كانت كلا ف و ن خطأ . ويعطينا الجدول ٢ جدول الصواب للعبرة (ف أو ن)

ف	ن	ف أو ن
ص	ص	ص
ص	خ	ص
خ	ص	خ
خ	خ	خ

الجدول ب

وتكون العبارة البسيطة « نفي ف » صائبة اذا كانت ف خطأ وتكون خطأ عندما تكون ف صائبة (انظر الجدول أ).

ف	نفي
خ	ص

الجدول أ

يقال لعبارتين لهما نفس جدولي الصواب انهما متكافئتان منطقياً . واذا كانت قيم الصواب لعبارة ليست نفس قيم الصواب لعبارة اخرى تكون العبارتان غير متكافئتين منطقياً . وتؤكد قوانين دي مورجان ان النفي للعبارة «ف و ن» يكون مكافئاً منطقياً للعبارة « نفي ف أو نفي ن » . ويكون النفي للعبارة « ف أو ن » مكافئاً منطقياً للعبارة « نفي ف و نفي ن » . (انظر التمرين ١) .

التضمين « اذا كانت ف ، فإن ن » يرمز لها بالرمز $\Leftarrow$ ف $\Leftarrow$ ن وتقرأ ايضاً « ف تتضمن ن » وتكون هذه العبارة صائبة عندما تكون ف صائبة و ن صائبة ، وتكون خطأ عندما تكون ف صائبة و ن خطأ . وبما انه لا يمكن فعلاً معاملة العبارة ف $\Leftarrow$ ن عندما تكون ف خطأ ، فتقول انها تكون صائبة في هذه الحالة . (والجملة التالية هي مثال على هذه الحالة : اذا كان العشب احمر ، فالسماء تتلج .) وجدول الصواب للتضمين ف $\Leftarrow$ ن مبين في الجدول ٤ .

ف	ن	ف ← ن
ص	ص	ص
ص	خ	ص
خ	ص	خ
خ	خ	خ

الجدول ١

في التضمين $F \Leftarrow N$ ن تدعى العبارة F بالفرضية وتدعى N بالنتيجة. والعبارة $F \Leftarrow N$ تكافئ منطقياً العبارة «نفي F أو N » ويبين ذلك بجدول الصواب . (انظر التمرين ٢ .)
ويكون النفي للعبارة « إذا كانت F ، فإن N » مكافئاً للعبارة « F و نفي N » وبهذا فإن « نفي ($F \Leftarrow N$) يعني « F ونفي N » . ونفي التضمين $F \Leftarrow N$ يكون بالقول ان الفرضية F تتحقق ولكن النتيجة N خطأ .

عكس الايجاب للتضمين $F \Leftarrow N$ هو التضمين « نفي N $\Leftarrow$ نفي F » . ويكون عكس الايجاب مكافئاً منطقياً للتضمين الاصيل . ويمكن احياناً تحقيق $F \Leftarrow N$ ببرهنة عكس الايجاب « نفي N $\Leftarrow$ نفي F » عكس العبارة $F \Leftarrow N$ هو التضمين $N \Leftarrow F$ ولا يكون العكس مكافئاً منطقياً للتضمين الاصيل . ولا يستطيع احد ان يبرهن تضميناً ببرهنة عكسه ، كما لا يستطيع افتراض ان العكس $N \Leftarrow F$ يكون صائباً لمجرد انه قد تم برهان $F \Leftarrow N$ صائبة

وهناك عدة طرق لذكر التضمين $F \Leftarrow N$. منها هذه العبارات التالية :

إذا كانت F ، فإن N

تكون F كافية للعبارة N

F فقط اذا N

N ضرورية للعبارة F

وتكون العبارة « F اذا وفقط اذا N » صائبة اذا كانت F و N كلاهما صائبتين او كلاهما خطأ . ويرمز لها بالرمز $F \Leftrightarrow N$. وجدول الصواب للعبارة $F \Leftrightarrow N$ مبين في الجدول ١.

ف	ن	ف $\Leftrightarrow$ ن
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	ص

الجدول ١

ويمكن كتابة العبارة « ف اذا وفقط اذا ن » في اي من الصيغ التالية:

ف $\Leftrightarrow$ ن

ف $\Leftarrow$ ن و ن $\Leftarrow$ ف

ف مكافئة للعبارة ن

ف ضرورية وكافية للعبارة ن

وبما ان عكس الايجاب للعبارة ن $\Leftrightarrow$ ف يكون مكافئاً للعبارة نفي ف $\Leftarrow$ نفي ن ، فالعبارة

« ف اذا وفقط اذا ن » تكون مكافئة منطقياً للعبارة

(ف $\Leftarrow$ ن) و (نفي ف $\Leftarrow$ نفي ن)

ولتكن ف (س) و ن (س) عبارتین تشملاں متغيراً ، فمثلاً ، لتكن ف (س) العبارة س + ١ <

س . فان ف (س) تكون صائبة لكل عدد حقيقي س . وكمثال آخر لتكن ن (س) العبارة س^٢

= ١ . فان ن (س) تكون صائبة للعديدين الحقيقيين س = ١ و س = -١ وخطأ كل الاعداد

الحقيقية الاخرى.

والرمز

٧ س $\Leftarrow$ س ف (س)

يقراً « لكل س $\Leftarrow$ س ف (س) » . تكون العبارة ٧ س $\Leftarrow$ س ف (س) صائبة اذا وفقط اذا كانت

ف (س) صائبة لكل عنصر س للمجموعة س التي قيد المناقشة . وتكون العبارة ٧ س $\Leftarrow$ س ف (س)

ف (س) خطأ اذا وفقط اذا كانت (س) خطأ ولو لعنصر واحد على الاقل س $\Leftarrow$ س ف (س) . ويكتب

احياناً ببساطة ٧ س ف (س) اذا كان واضحاً من سياق الكلام ما هي س المقصودة ، ويقراً

الرمز

E س $\Leftarrow$ س ف (س)

«توجد س $\Leftarrow$ س ف (س) » . وتكون هذه العبارة E س $\Leftarrow$ س ف (س) صائبة اذا وفقط

إذا وجد على الأقل عنصر في المجموعة S بحيث أن $F(S)$ تكون صائبة . وتكون العبارة خطأ إذا وفقط إذا كانت $F(S)$ خطأ لكل $S \in S$. ويكتب أحياناً $E(S)$ ف $F(S)$ ويكون مفهوماً أن $S \in S$ ، حيث S هي المجموعة التي تناقشها .
وبربط هذين الزمرين ، نرى أن النفي للعبارة $\forall S \in S$ ف $F(S)$ هو العبارة $E(S) \in S$ نفي $F(S)$ (س)

والنفي للعبارة $\exists S \in S$ ف $F(S)$ هو العبارة $\forall S \in S$ نفي $F(S)$ (س) «
وبما أن نفي العبارة $F(S)$ (س) $\Leftarrow$ ن (س) هو «ف (س) ونفي ن (س)»
فإن نفي العبارة

$\forall S \in S$ ف (س) $\Leftarrow$ ن (س) (

هو العبارة

$E(S) \in S$ (ق (س) ونفي ن (س))

ونحصل على النفي للعبارة

$\forall S \in S$ ف (س ، ص) بخطوتين

أولهما إيجاد

نفي $\forall S \in S$ ف (س ، ص) $\Leftarrow E(S) \in S$ نفي (س ، ص) (س ، ص)

وبما أن العبارة

نفي (س ، ص) ف (س ، ص) (

تكافئ العبارة

$\forall S \in S$ نفي (س ، ص)

نجد أخيراً أن النفي للعبارة $\forall S \in S$ ف (س ، ص) هو العبارة

$E(S) \in S$ نفي (س ، ص)

وعلى سبيل المثال ، لتكن S ، S ، ... متتالية مكونة من أعداد حقيقية.

ففي التفاضل والتكامل أو التفاضل والتكامل المتقدم يتعلم الطالب أن نهاية المتتالية تكون العدد

L إذا وفقط إذا كان لكل $\epsilon > 0$. يوجد عدد صحيح M بحيث أن لكل $n \geq M$ ، $|s_n - L| < \epsilon$.

ونكتب بصيغة الزمر :

نها $s_n = L$ إذا وفقط إذا كان

$\forall \epsilon > 0$. $E(M) \in S$ ($\forall n \geq M$ ، $|s_n - L| < \epsilon$)

ويكون النفي لهذه العبارة الرمزية

E ($\exists \epsilon > 0$. $\forall M \in \mathbb{N}$ ، $\exists n \geq M$ ، $|s_n - L| \geq \epsilon$)

وبالكلمات لا تكون النهاية للمتتالية $s_1, s_2, \dots$ تساوي l اذا وفقط اذا اوجد $\epsilon > 0$. بحيث انه لكل عدد صحيح m . $|s_m - l| \leq \epsilon$ لبعض $r = m$.

تمارين :

١ - اكتب جداول الصواب لكل زوج من العبارات التالية واستخدمها لبرهنة قوانين دي مورجان

أ. $\neg (p \vee q)$ ، $\neg p \wedge \neg q$

ب. $\neg (p \wedge q)$ ، $\neg p \vee \neg q$

٢ - اكتب جداول الصواب لكل من العبارات التالية وقارن كل جدول مع جدول العبارة $p \iff q$ ن لتعيين هل العبارة مكافئة الى $p \iff q$ ن ام لا .

أ. $p \iff \neg p$ (العكس)

ب. $\neg p \iff p$ (المعكوس)

ج. $\neg p \iff \neg \neg p$ (عكس الايجاب)

د. $p \iff \neg \neg p$

٣ - اثبت ان العبارتين $p \iff q$ و $[(p \iff q) \wedge (q \iff r)] \iff (p \iff r)$ تكونان متكافئتين منطقياً .

٤ - عين هل كل من العبارات ادناه صائبة ام خطأ . اكتب النفي لكل عبارة . ويمثل الرمز R و Z المجموعتين المكونتين من الاعداد الحقيقية والاعداد الصحيحة على الترتيب .

أ. يوجد عدداً حقيقيان s, t بحيث ان $s + t = 2$ و $s \cdot t = 2$.

ب. $\exists s \in R$ (اذا كانت $s > 3$ ، فان $s > 0$)

ج. توجد $s \in R$ بحيث ان $s^2 > 0$.

د. $\forall s \in Z$ $s < 0$.

هـ. $\forall s \in Z$ $\exists E \in Z$ $s > E$

و. $\exists E \in Z$ $\forall s \in Z$ $s > E$

ب. طرق البرهان

يتعامل الطالب في الرياضيات مع قضايا (اي عبارات يفترض او يبرهن صوابها او خطأها وتصنف هذه القضايا كأوليات وتمهيدات ، نظريات ، أو عرضيات. والأولية هي عبارة يفترض ان تكون صائبة ، وغالباً ما تكون بديهية واضحة بذاتها ، وكل فروع الرياضيات تبدأ بعبارات غير معرفة وأوليات . وكل الانواع المتبقية من العبارات يجب ان يبرهن صوابها .

والتمهيدية عبارة تستعمل في برهنة عبارة اخرى (فرضية او نظرية) ولكن يرى ان اهميتها قليلة بنفسها. والنظرية فرضية رئيسية . وغالباً ما يكون التمييز بين النظرية والفرضية مسألة رأي شخصي . والواقع انه حتى التمهيدات يمكن ان تصبح نظريات بمعنى انها تستعمل على مدى واسع .

ومن الغايات الرئيسية للرياضي ان يبرهن او ينفي اي حدس ونعني بهذا انه يرغب في تحقيق صحة العبارة . ويتم ذلك بمناقشة تؤكد ان نصاً ما يسمى النتيجة ينتج فعلاً من عبارات تسمى المقدمات او المقولات .

ويمكن ان تشتمل هذه المقدمات على اوليات ، وتعاريق ، ونظريات مبرهنة سابقاً . ولكي تقيم برهاناً على عبارة ، يجب ان تكون المناقشة صحيحة. ونعني بهذا انه اذا كانت F_1 ، F_2 ، ... ، F_n مقدمات و N هي النتيجة فيجب ان تكون البارة المركبة (F_1 و F_2 و ... و F_n) $\Rightarrow N$ دائماً صائبة (اي يجب ان تكون متكررة الصواب).
والمقولات التالية كلها صحيحة :

النقاش بعكس الايجاب

$$\left\{ \begin{array}{l} F \Rightarrow N \\ \text{نفى } N \end{array} \right. \text{ المقدمات}$$

النتيجة : - نفى F
قاعدة الفصل

$$\left\{ \begin{array}{l} F \text{ أو } N \\ \text{نفى } F \end{array} \right.$$

$$\therefore N$$

القاعدة الرئيسية للاستدلال

$$\left\{ \begin{array}{l} F \Rightarrow N \\ F \end{array} \right.$$

النتيجة : - N
قاعدة السلسلة للاستدلال

$$\left\{ \begin{array}{l} F \Rightarrow N \\ N \Rightarrow R \end{array} \right.$$

$$\therefore F \Rightarrow R$$

يمكن بيان انه باستخدام هذه المقولات الصحيحة الاساسية يمكن تكوين مقولات اخرى صحيحة فعلى سبيل المثال افرض اننا نرغب بتعيين هل المقولة التالية صحيحة ام لا .

$$F_1 \Rightarrow F_2$$

إذا استيقظ احمد في الساعة السابعة ، فانه يكون عصفوراً يقظاً.

ف_١ ← ف_٢

إذا كان احمد عصفوراً يقظاً ، فانه يحصل على قوته

يستيقظ احمد في الساعة السابعة.

ف_١

لذا يحصل احمد على قوته

ف_١ ← ف_٢

وحسب قاعدة السلسلة للاستدلال نعلم ن المقولة

ف_١ ← ف_٢

ف_١ ← ف_٢

ف_١ ← ف_٢

صحيحة . وبما ان

ف_١ ← ف_٢

ف_١

ف_١ ← ف_٢

تكون ايضاً صحيحة ، ونلاحظ انه بتجميع المقولتين نحصل على المقولة الابتدائية المعطاة ولكن مضافاً اليها ، في الوسط ، المقدمة (ف_١ = ف_٢) . وبهذا فان المقولة الاصلية تكون صحيحة وغالباً وغالباً ما تكون العبارة التي نرغب في برهنتها تضمينياً مثل ف_١ ← ن . وهناك طريقتان لبرهان عبارة كهذه — مباشرة او غير مباشرة.

في البرهان المباشر نفترض ان المقولة ف_١ ، في التضمين ف_١ ← ن صائبة ونحاول برهنة ان العبارة ن من الضروري ان تكون صائبة نتيجة لذلك . ولعمل ذلك نستبعد الحالة التي يكون فيها التضمين ف_١ ← ن خطأ اي عندما تكون ف_١ صائبة و ن خطأ . فمثلاً عندما نفترض ف_١ صائبة نحاول انشاء سلسلة من العبارات ذات الصيغ ف_١ ← ف_٢ ، ف_٢ ← ف_٣ ، ... ، ف_٣ ← ف_٤ ن وكل من هذه اولية او تعريف ، او نظرية مبرهنة سابقاً . وتكون العبارة المركبة.

[ف_١ ← ف_٢) و (ف_٢ ← ف_٣) و ... و (ف_٣ ← ف_٤)] ← ن

عبارة صائبة اذا فقط اذا كانت ن صائبة .

ولهذا يجب ان تكون ن صائبة .
وكمثال فلنبرهن العرضية التالية :

عرضية :

ليكن س و ص عددين صحيحين . فاذا كانت س زوجياً و ص فردياً فان س ص يكون زوجياً .

البرهان :

لنفرض ان س زوجي و ص فردي . بما ان س زوجي فيوجد عدد صحيح ٢ بحيث ان $س = ٢$.
 ٢ . وبما ان ص فردي فيوجد عدد صحيح $ب$ بحيث ان $ص = ٢ب + ١$ وباستخدام صيغة الرموز
نحصل على النقاش التالي :

$$(س = ٢) \text{ و } (ص = ٢ب + ١)$$

$$\Leftarrow (س ص = ٢٢ (٢ب + ١))$$

$$\Leftarrow (س ص = ٢ (٢ب + ١))$$

$$\Leftarrow (س ص = ٢٢ ، حيث $ص = ٢ب + ١$)$$

$$\Leftarrow (س ص زوجي)$$

ولذا فان س ص تكون زوجية .

وعندما لا تعرف كيف تبدأ برهاناً مباشراً ، فيمكن ان تحاول دراسة امثلة (طريقة «اعمل شيئاً»
او بالسير خلفاً بدءاً بالنتيجة او ان تفتش عن نظريات واوليات تظهر فيها ف كفرض او تظهر
ن كنتيجة . وفي البرهنة بدءاً بالنتيجة ، عند محاولة البرهنة ان $ف \Leftarrow ن$ ، يبدأ الطالب من
ن ويحاول ان يستنتج ف او بعض العبارات المعروف صوابها ، مكوناً سلسلة يأمل ان يستطيع
عكسها . فاذا امكن عكس السلسلة (كما يحدث مراراً في المعادلات او المتباينات) ، نحصل على
برهان للعبارة $ف \Leftarrow ن$. (انظر برهان العرضية ٥ كمثال على هذه الطريقة) . ولكن اذا لم
تتمكن من عكس السلسلة (كما هي الحالة غالباً) . فان برهان هذه العبارة لم يتم بعد . رأينا
ان التضمنين $ف \Leftarrow ن$ وعكس الايجاب لها. نفي $ن \Leftarrow نفي ف$ متكافئان منطقياً ، فيجب ان
تكون هاتان العبارتان اما صائبتين او خطأ معاً .

ولذا اذا صادفنا صعوبات في برهنة العبارة $ف \Leftarrow ن$ مباشرة ، فيمكننا ان نحاول بدلا من ذلك
صواب عكس الايجاب نفي $ن \Leftarrow نفي ف$. فمثلا ، قد يكون من الصعب ان تبرهن مباشرة
انه اذا كان س عدداً صحيحاً وكان س زوجياً ، فان س تكون زوجية . فلنبرهن هذه العبارة
لتكون مثالا على البرهان بعكس الايجاب .

عرضية ٢ :

ليكن س عدداً صحيحاً فإذا كان س زوجياً ، فإن س يكون زوجياً .

البرهان :

تأخذ العرضية الصيغة $F \Leftrightarrow N$ ، حيث F هي العبارة «س زوجية» و N هي العبارة «س زوجي» ولهذا يكون عكس الايجاب نفي $N \Leftrightarrow$ نفي F هو العرضية : « اذا كانت س فردية (ليست زوجية) ، فإن س تكون فردية (ليست زوجية) » .
لنفرض ان س فردية . فيوجد عدد صحيح f بحيث ان $S = 2f + 1$.

$$\begin{aligned} S = 2f + 1 &\Leftrightarrow (S) = (2f + 1) \\ &\Leftrightarrow (S) = (2f + 2 + 1) \\ &\Leftrightarrow (S) = (2f + 2) + 1 \\ &\Leftrightarrow (S) = 2(f + 1) + 1 \end{aligned}$$

فتكون S فردية . وبما ان عكس الايجاب يكون صائباً ، فالعبارة الاصلية $F \Leftrightarrow N$ تكون ايضاً صائبة.

ويدعى البرهان بعكس الايجاب برهاناً غير مباشر لاننا نبرهن العبارة المعطاة مباشرة . وهناك نوع ثاني من البرهان غير المباشر وهو البرهان بالتناقض ويستعمل هذا النوع على الغالب عندما نعلم ان هنالك احتمالين او ثلاثة احتمالات ، ونريد ان نحذفها كلها ما عدا واحداً . فمثلاً ، نعلم ان كل عدد حقيقي يكون موجباً او سالباً او صفراً ، ولكن لا يمكن ان يكون غير ذلك (قانون التثليث) . ولهذا اذا اردنا ان نبرهن ان كمية ما f موجبة فنفترض ان $f = 0$ ونحاول ان نصل الى عبارة نعلم انها خطأ.

والطريقة العامة لبرهان F بالتناقض تبدأ بافتراض ان نفي F صائباً ونستنتج من الافتراض عبارة N نعلم من نظريات سابقة أو أوليات انها خطأ . وبما اننا نعلم ان العبارة نفي $F \Leftrightarrow N$ تكون صائبة عندما تكون N خطأ فيتبع من جداول الصواب ان نفي F يكون خطأ . ومن ثم فيجب ان تكون F صائبة.

وبرهان ان العدد $\sqrt{2}$ غير نسبي هو مثال على استخدام التناقض .

عرضية ٣ :

العدد $\sqrt{2}$ غير نسبي

البرهان :

افرض ان $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي . فيوجد عدنان صحيحان : p و b حيث ان $\frac{p}{b} = \sqrt{2}$ وليس
للعدين p و b عوامل مشتركة (الكسر في اصغر صورته)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{p}{b} = 2 \right) \leftarrow \\ & \left({}^2b^2 = {}^2a \right) \leftarrow \\ & \left({}^2a \text{ عدد صحيح زوجي} \right) \leftarrow \\ & \left({}^4 \text{ زوجية} \right) \left(\text{انظر العرضية } 2 \right) \leftarrow \\ & \left({}^2 = {}^2a - \text{حيث } a \text{ عدد صحيح} \right) \leftarrow \\ & \left({}^2b^2 = {}^2a = {}^2a - 4 \right) \leftarrow \\ & \left({}^2b^2 = {}^2a - 2 \right) \leftarrow \\ & \left(b \text{ عدد صحيح زوجي} \right) \leftarrow \\ & \left(b = {}^2a - \text{حيث } a \text{ عدد صحيح} \right) \leftarrow \\ & \left({}^4 \text{ و } b \text{ بينهما العامل } 2 \text{ مشترك} \right) \leftarrow \end{aligned}$$

وبهذا فان الافتراض ان $\sqrt{2}$ عدد نسبي خطأ وبذا نعلم ان $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي :

وعندما نفشل في برهنة حدس ما بـاي من هاتين الطريقتين ، المباشرة وغير المباشرة ، فيمكن ان يكون الحدس غير صحيح . وهناك طريقتان قياسيـتان لنقض اي حدس او اثبات بطلانه . أولهما ايجاد مثال واحد لا يحقق الحدس . ويسمى هذا المثال بالمثال العكسي . فمثلا يمكننا استخدام مثل عكسي لنقض الحدس بأنه اذا كانت $S \in Z$ و $S \ll 2$ ، فان $S^2 - 4S = 0$ بالاشارة الى ان $3 \leq 2$ وان $4 - 23 = -3$ ، وبذا فان الحدس كما هو خطأ . والطريقة الثانية لمحاولة نفي اي حدس هي بافتراض ان الحدس صحيح ثم اشتقاق علاقات اضافية منه . فاذا وجدنا علاقة تناقض اولية ما أو تعريفاً او نظرية مبرهنة سابقاً فان الحدس يكون خطأ . وقد استخدمت هذه الطريقة الخاصة في فحص احداث أدت اخيراً الى تطوير مواضيع جديدة في الرياضيات . ويصح هذا بوجه خاص في الهندسة ، حيث ان المحاولات لاختبار مقولة اقليدس في التوازي بافتراض ان هذه المقولة غير صحيحة قد قاد بدلا من ذلك الى الهندسات اللاقليدية . في تطوير هذه الهندسات افترض ان نفي فرضية التوازي كان صحيحاً واشتقت النظريات من هذا الافتراض (بالاضافة الى اوليات اخرى) مما لم يتعارض مع الاوليات والنظريات المعروفة.

وقد تحتاج الى ان تبرهن عرضية صيغتها $F \Leftrightarrow N$. فيما ان $F \Leftrightarrow N$ تعني ($F \Leftrightarrow N$) و ($N \Leftrightarrow F$) :

نستطيع ان نمضي في برهنة العبارتين $F \Leftrightarrow N$ و $N \Leftrightarrow F$ فكل على حدة بواسطة احدى الطرق اعلاه . ولكن ، قد رأينا ان $F \Leftrightarrow N$ تكافئ ($F \Leftrightarrow N$) و (نفي $F \Leftrightarrow$ نفي N) .

وغالبا ما يزودنا هذا بطريقة ملائمة لبرهان عبارة تكافؤ :

برهن $F \Leftrightarrow N$ وبعد ذلك برهن نفي $F \Leftrightarrow$ نفي N . وكمثال على ذلك لنبرهن العرضية التالية :

عرضية ٤

ليكن S عددا صحيحا . يكون S فرديا اذا وفقط اذا كان S فرديا

البرهان

لتكن F العبارة « S فردية » ولتكن N العبارة « S فردية » . فان عرضيتنا تصبح بالصيغة $F \Leftrightarrow N$. ولكي نبرهن $F \Leftrightarrow N$ فنريد ان نبرهن ان $F \Leftrightarrow N$ وان نفي $F \Leftrightarrow$ نفي N .

فلنفترض اولا ان S فردية . فيوجد عدد صحيح A بحيث ان $S = 2A + 1$.

$$(S = 2A + 1) \Leftrightarrow (S = 2(A + 1))$$

$$\Leftrightarrow (S = 2(A + 1))$$

$$\Leftrightarrow (S = 2B + 1 \text{ حيث } B = A + 1)$$

$$\Leftrightarrow (S \text{ فردية})$$

ولذلك فان S تكون فردية اذا كانت S فردية . ولنبرهن الآن نفي $F \Leftrightarrow$ نفي N .

افترض ان S ليست فردية . فيوجد عدد صحيح A بحيث ان $S = 2A$.

$$(S = 2A) \Leftrightarrow (S = 2(A))$$

$$\Leftrightarrow (S = 2(A))$$

$$\Leftrightarrow (S = 2B \text{ حيث } B = A)$$

$$\Leftrightarrow (S \text{ تكون زوجية})$$

وبذا فان عكس الايجاب نفي $F \Leftrightarrow$ نفي N صحيح . ويجب ان نحصل على صحة

التضمين $N \Leftrightarrow F$.

وطريقة ثالثة لبرهنة التكافؤ $F \Leftrightarrow N$ هي تكوين سلسلة من عبارات متكافئة تنطلق

من ف الى ن كما يلي :

$\text{ف} \Leftrightarrow \text{ف}_1, \text{ف}_2 \Leftrightarrow \text{ف}_1, \text{ف}_2 \Leftrightarrow \dots \text{ف}_n \Leftrightarrow \text{ن}$

وعلى سبيل المثال ، نستطيع استخدام هذه الطريقة لبرهنة العبارة التالية :

يكون العدد الصحيح s فردياً اذا وفقط اذا كان s^{16} فردياً . نعلم من الفرضية ٤ ان العدد

الصحيح س يكون فردياً اذا وفقط اذا كان س^٢ فردياً . ولهذا نحصل على السلسلة التالية :

(س فردية) ↔ (س² فردية)

$$\Leftrightarrow ((s^2) = s^2 \text{ فردية})$$

$$\Leftrightarrow ((s^1) = s^2 \text{ فردية})$$

$$\Leftrightarrow ((s^1) = s^{16} \text{ فردية})$$

وهناك صيغ أخرى معروفة للاحداس تكتب بالرموز ، مثل $E \supset (S \vee S)$ ، $\forall S \supset S$ ف (س) E س وحيدة بحيث ان ف (س) .

ولنبرهن العبارة E س $\exists$ س ف (س) ، نحتاج فقط لبيان او انشاء عنصر واحد س $\exists$ س بطريقة ما بحيث ان العبارة ف (س) تكون صائبة . وقد يكون الانشاء الفعلي لهذا العنصر صعباً جداً (فمثلا ايجاد حل للمعادلة الحدودية الرابعة

$$\bullet = s^4 + s^3 + s^2 + s + 1$$

امر معقد جداً) . ونقابل على الدوام هذا النوع من البرهان عندما نريد حل المعادلة او متباينة لان ايجاد الحل اثبات للوجودية .

وعلى سبيل المثال فلنبرهن العرضية التالية :

عرضية ○

لیکن a و b عددین حقیقین حیث $a \neq 0$. فہناک عدد حقیقی s بحیث $an + s = b$.

البرهان

هناك نجد العمل بخطى عكسية مفيداً جداً . فلنفرض انه العدد س موجود

$$(اس = - ب) \iff (اس = ب + \cdot)$$

(س = $\frac{1}{m}$) ←

ويجب ان نبين الان انه يمكننا عكس خطواتنا . بما ان $p \neq 0$ ، فيكون العدد $(\frac{p}{p})$

موجوداً . لتكن $s = - \left(\frac{p}{p} \right)$:

$$(s = - \left(\frac{p}{p} \right) \Leftrightarrow (s + p = \left(\frac{p}{p} - \right) + p = p - p + p = 0)$$

ولهذا فللعدد $- \left(\frac{p}{p} \right)$ الخاصية المطلوبة ، وقد عرضنا الحل الضروري . ولنبرهن العبارة $\forall s \exists s$ ف (س) ، فلنفرض س تمثل عنصراً ثابتاً ولكنه اختياري من المجموعة s ونبرهن انه في هذه المجموعة تكون العبارة ف (س) صائبة « وبما ان س عنصراً اختياري في المجموعة s ، فنكون قد بينا ان ف (س) تكون صائبة لكل $s \in s$. فعلى سبيل المثال لنبرهن العرضية التالية :

عرضية ٦

لكل $s \in R$ ، $s^2 \leq 0$

البرهان

نحتاج الى الحقيقة القائلة ان حاصل ضرب اعداد موجبة يكون موجباً والى قانون التثليث . لتكن $s \in R$. فتكون س موجبة او س سالبة أو $s = 0$

$$\begin{aligned} (s \text{ موجبة}) &\Leftrightarrow (s \cdot s = s^2 \text{ وهي موجبة}) \\ &\Leftrightarrow (s^2 \geq 0) \\ (s \text{ سالبة}) &\Leftrightarrow (-s \text{ موجبة}) \\ &\Leftrightarrow (-s) \cdot (-s) = s^2 \text{ فهي موجبة}) \\ &\Leftrightarrow (s^2 \geq 0) \end{aligned}$$

$$(s = 0) \Leftrightarrow (s \cdot s = 0) \cdot (0) = 0 \text{ ولهذا فان } s^2 \leq 0 \text{ لكل } s \in R.$$

وبرهان العرضية ٦ يصلح ايضاً مثالا على البرهان بالتجزئة الى حالات أو أوضاع . ولنبرهن العبارة E عنصر وحيد $s \in s$ بحيث ان ف (س) ، يجب ان نبرهن اولا العبارة E $s \in s$ ف (س) . وبعدها يجب ان نبرهن انه توجد س واحدة فقط في s بهذه الخاصية ف (س) . واحدى الطرق لبرهان هذه العبارة الاخيرة تكون بافتراض انه يوجد عنصران s_1 و s_2 في s بحيث تكون ف (س_١) و ف (س_٢) صائبتين نبرهن ان $s_1 = s_2$ ويسمى هذا الجزء الاخير للبرهان برهان الوحدانية وتسمى الخطوة الاولى برهان الوجودية . وعلى سبيل المثال على برهان الوحدانية لنعتبر العرضية التالية :

عرضية ٧

ليكن a و b عددين حقيقيين حيث $a \neq 0$. فهناك عدد حقيقي وحيد s بحيث ان $as + b = 0$

البرهان

تبين لنا العرضية ٥ وجودية العدد s . ولنفرض الآن انه يوجد عدداً حقيقيان s_1 و s_2

بحيث ان $as_1 + b = 0$ و $as_2 + b = 0$

$$[(as_1 + b = 0) \text{ و } (as_2 + b = 0)]$$

$$\Leftrightarrow (as_1 + b = as_2 + b)$$

$$\Leftrightarrow (as_1 = as_2) \text{ (الاختزال للجمع)}$$

$$\Leftrightarrow (s_1 = s_2) \text{ (الاختزال للضرب)}$$

وهناك برهان ثان على وحدانية الحل باستخدام الجزء الأول من برهان

العرضية ٥ ، حيث بينا انه اذا كانت s حلاً للمعادلة فان $s = - (\frac{b}{a})$.

وهذا يبرهن انه يوجد حل واحد بالضبط ، وهو $- (\frac{b}{a})$.

الملاحق ٣ الخصائص الجبرية والترتيبية للاعداد

لترمز Z للمجموعة المكونة من كل الاعداد الصحيحة ، Q للمجموعة المكونة من كل الاعداد النسبية ، و R المجموعة المكونة من كل الاعداد الحقيقية . فالخصائص التالية صحيحة لكل من هذه المجموعات الثلاث ، Z ، Q ، R ، بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب . وفيما يلي يرمز الحرف s لأي من هذه المجموعات الثلاث .

- ١ - انغلاق المجموعة s بالنسبة للجمع : لكل a ، $b \in s$
(اي ان حاصل جمع اي عنصرين من s يكون عنصراً في s) .
- ٢ - التجميعية للجمع : لكل a ، b ، $c \in s$ ، $a + (b + c) = (a + b) + c$.
- ٣ - وجود عنصر محايد للجمع : هنالك عنصر $(0) \in s$ بحيث ان
 $a + 0 = 0 + a = a$ لكل $a \in s$
- ٤ - وجود نظير جمع : لكل $a \in s$ يوجد عنصر $-a \in s$ بحيث ان
 $0 = (a - a) + a$
- ٥ - التبديلية للجمع : لكل a ، $b \in s$
 $a + b = b + a$
- ٦ - انغلاق المجموعة s بالنسبة للضرب : لكل a ، $b \in s$ ، $ab \in s$ (اي يكون حاصل الضرب اي عنصرين من s عنصراً في s) .
- ٧ - التجميعية للضرب : لكل a ، b ، $c \in s$ ،
 $a(b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- ٨ - وجود عنصر محايد للضرب : يوجد عنصر $1 \in s$ بحيث ان
 $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ لكل $a \in s$.
- ٩ - التبديلية للضرب : لكل a ، $b \in s$ ،
 $a \cdot b = b \cdot a$
- ١٠ - التوزيعية للضرب على الجمع : لكل a ، b ، $c \in s$ ،
 $a(b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
- ١١ - الاختزال للضرب : اذا كانت a ، $b \in s$ ، $c \neq 0$ ،
و $a \cdot c = b \cdot c$ ، فان $a = b$.
- ١٢ - وجود نظير ضربي في Q و R : اذا كانت s احدى المجموعات Q أو R (وليس Z) ،
فان لكل $a \in s$ - $\{0\}$ يوجد عنصر $a^{-1} \in s$ بحيث ان $1 = a \cdot a^{-1}$

ويعرف الطرح لعنصرين $A, B \in R$ بدلالة نظائر للجمع بوضع
 $A - B = A + (-B)$.

وتعرف القسمة لعنصر $A, B \in R$ حيث $B \neq 0$ بدلالة نظائر الضرب بوضع

$$A : B = \frac{A}{B}$$

وبالاضافة الى الخصائص الاثني عشر المذكورة اعلاه للجمع والضرب فلكل من المجموعات العددية الثلاث R, Q, Z خاصية الترتيب . وبما ان العبارة التالية تكون صحيحة لكل من المجموعات الثلاث ، فنرمز لاي منها بالرمز $\leq$.

١٣ - هنالك مجموعة جزئية فعلا ، غير خالية M في S بحيث ان

$$A \cdot 0 = 0 \quad \forall A \in M$$

ب. لكل $s \in S$ ، يتحقق واحد بالضبط من الشروط التالية :

$$s = 0, \quad s \in M, \quad \text{أو} \quad s \notin M. \quad (\text{قانون التثليث})$$

$$\text{ح. اذا كانت } A \in M, \quad B \in M, \quad \text{فان } A + B \in M \quad \text{و} \quad A \cdot B \in M.$$

ويقال لعناصر المجموعة M بالعناصر الموجبة في S ، ونكتب $s \leq 0$ اذا وفقط اذا كان $s \in M$.

م وباستخدام هذا الرمز يمكننا اعادة كتابة الخاصية ١٣ ب كما يلي :

$$\text{ب. اذا كانت } s \in M, \quad \text{فان } s \text{ تحقق واحدة بالضبط مما يلي :}$$

$$s = 0 \quad \text{أو} \quad s \leq 0, \quad \text{أو} \quad s < 0. \quad (\text{قانون التثليث}).$$

اذا كانت $A \in M, \quad B \in S$ ، نقول ان A اقل من B ونكتب $A < B$ اذا وفقط اذا كان $B - A \in M$.

م (او $B - A < 0$) . ونقول ان B اكبر من A ، ونكتب $B > A$ ، اذا وفقط اذا كان $A < B$.
 ولعلاقة الترتيب $\leq$ الخصائص التالية :

١٤ - أ. يحقق كل زوج من العناصر $A, B \in S$ واحدة بالضبط مما يلي :

$$A = B, \quad A > B, \quad \text{أو} \quad B > A. \quad (\text{قانون التثليث}).$$

ب. اذا كانت $A > B$ و $B > C$ ، فان $A > C$ (خاصية التعدي).

$$\text{ح. اذا كانت } A \in M, \quad B \in S, \quad \text{فان } A > B - A.$$

$$\text{د. اذا كانت } A \in M, \quad B \in S, \quad \text{فان } A > B, \quad \text{و} \quad A > C, \quad \text{فان}$$

$$A > B + C.$$

$$\text{هـ. اذا كانت } A \in M, \quad B \in S, \quad \text{فان } A > B, \quad \text{و} \quad A < 0, \quad \text{فان}$$

$$A < B + C. \quad \text{واذا كانت } A < 0, \quad \text{فان } A < B + C.$$

ونعني بالرمز $a \geq b$ أن $a > b$ أو $a = b$.
 وللمجموعة ${}^+Z$ المكونة من كل الأعداد الصحيحة الموجبة الخصائص التالية :
 أ. $1 \in {}^+Z$ ويكون 1 العنصر الأصغر في ${}^+Z$
 (أي $1 \leq r$ لكل $r \in {}^+Z$) .
 ب. لكل عنصر في ${}^+Z$ تالٍ . ولهذا ، إذا كانت $r \in {}^+Z$ ،
 فإن $1 + r \in {}^+Z$ و $1 + r < r$
 وهاتان هما اثنتان من أوليات بيانو التي تعرف المجموعة ${}^+Z$. ومن هذه الأوليات مبدأ الاستقراء
 المنتهي (انظر الملحق ٥) . ونبين في الملحق ٥ أن هذه الأولية هي نتيجة لأولية أخرى .

الملحق ٤ : علاقات التكافؤ

غالباً ما يواجه دارس الرياضيات عبارة مقارنة او علاقة بين ازواج من العناصر في مجموعة معطاه والعلاقة ، او العلاقة الثنائية ، على اي مجموعة S تعيين لكل زوج من العناصر ، P ، $b \in S$ عبارة واحدة بالضبط بخصوص a و b . وهذه العبارة المعينة للزوج a ، $b \in S$ تكتب غالباً برمز مثل $a \sim b$. ويجب ان يكون للعبارة معنى لكل زوج a ، $b \in S$. فاذا كانت العبارة صائبة ، نكتب $a \sim b$ ، واذا كانت خطأ نكتب $a \not\sim b$. ومن الامثلة على العلاقات في مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة العلاقات « $a = b$ » ، « $a > b$ » ، « a احد عوامل b » .

واي علاقة ثنائية R على اي مجموعة S هي شكلياً اي مجموعة جزئية من $S \times S$. ففي اي زوج مرتب (a, b) ، $a \in S$ ، $b \in S$. اما ان (a, b) تنتمي الى R أو أن (a, b) لا تنتمي الى R (ولكن لا كلاهما) وبالنسبة للعلاقة R فيمكننا استخدام رمز علاقة مثل « $\sim$ » فاذا كانت $(a, b) \in R$ نكتب $a \sim b$. واذا كانت $(a, b) \notin R$ نكتب $a \not\sim b$. فمثلاً ، افرض ان

$$R = \{ (s, s) : s \in \mathbb{Z}^+ , s - s \text{ موجب} \}$$

هي العلاقة « اقل من » على المجموعة المكونة من كل الاعداد الصحيحة الموجبة ولتكن « $>$ » رمز هذه العلاقة . فان $(2, 1)$ تكون في R لان $2 > 1$ ، في حين ان $(1, 2)$ لا تكون في R لان $1 \not> 2$.

١ تعريف

علاقة التكافؤ $\sim$ على S هي علاقة تحقق الشروط الثلاثة التالية :

- أ. الانعكاسية : $a \sim a$ لكل $a \in S$.
- ب. التماثل : اذا كانت $a \sim b$ فان $b \sim a$ لكل $a, b \in S$.
- ج. التعدي : اذا كانت $a \sim b$ و $b \sim c$ فان $a \sim c$ لكل $a, b, c \in S$.

لاحظ ان العلاقة الوحيدة $a = b$ من بين العلاقات الثلاث المذكورة اعلاه هي علاقة تكافؤ والعلاقة « $(a > b)$ » علاقة تعد ولكنها ليست تماثلاً ولا انعكاسية ، والعلاقة « تكون عاملاً في » $(a \text{ تكون عاملاً في } b)$ انعكاسية وتعد ولكنها ليست تماثلاً .

٢ مثال

كل من العلاقات التالية علاقة تكافؤ :

- أ. في المجموعة المكونة من كل المستقيمات في أي مستوى معطى ، $l \sim l'$ (عادة $l \parallel l'$) إذا وفقط إذا كان المستقيم l' موازياً للمستقيم l . (يفترض ان يكون أي مستقيم موازياً لنفسه .)
- ب. في المجموعة المكونة من كل المثلثات في أي مستوى معين ، $\Delta \simeq \Delta'$ إذا وفقط إذا كان المثلث Δ' مطابقاً للمثلث Δ (تذكر بعض هندسة المدرسة الثانوية) .
- ج. في المجموعة المكونة من كل المثلثات في أي مستوى معطى ، $\Delta \sim \Delta'$ إذا وفقط إذا كان Δ' مشابهاً للمثلث Δ .
- د. في المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية المنتهية في أي مجموعة معطاه ، $S \sim S'$ ص إذا وفقط إذا كان للمجموعتين S و S' نفس العدد من العناصر .
- هـ. في أي مجموعة غير خالية ، $A \sim B$ إذا وفقط إذا كان $A = B$ هذه هي علاقة التكافؤ للمساواة .
- و. في المجموعة المكونة من كل الأعداد الصحيحة ، $A \sim B$ إذا وفقط إذا كان $A - B$ عدداً صحيحاً زوجياً (أي $A - B = 2r$ حيث r عدد صحيح) .

ونتيجة للخصائص التي عرفنا بها علاقة التكافؤ على المجموعة S نستطيع تجزئة (أو « تفسخ ») المجموعة S إلى مجموعات جزئية منفصلة ، وكثيراً ما يفيد هذا رياضياً . وسنصوغ هذا شكلياً في التعريفين ٣ و ٥ والنظرية ٦ .

٣ تعريف

لترمز $\sim$ إلى علاقة تكافؤ على S . فلكل $A \in S$ ليكن

$$[A] = \{ s : s \in S \text{ و } s \sim A \}$$

تسمى المجموعة $[A]$ بصف التكافؤ للعنصر A . وتتكون من كل العناصر $s \in S$ التي تكافئ A بالنسبة للعلاقة $\sim$.

٤ مثال

في المجموعة المكونة من كل الأعداد الصحيحة ضع $A \sim B$ إذا وفقط إذا كان $A - B$ زوجياً : تكون صفوف التكافؤ لعلاقة التكافؤ هذه .

$$[0] = \{ s : s \in \mathbb{Z} \text{ و } s - 0 \text{ زوجية} \}$$

$$[1] = \{ s : s \in \mathbb{Z} \text{ و } s - 1 \text{ زوجية} \}$$

الصف [٠] هو المجموعة المكونة من كل الاعداد الصحيحة الزوجية
و [١] هي المجموعة المكونة من كل الاعداد الفردية . لاحظ ان
[٤ -] = [٢ -] = [٠] = [٢] وهكذا في حين ان
[٣ -] = [١ -] = [١] = [٣] ، وهكذا ...

٥ تعريف

تجزئة المجموعة S هي مجموعة المكونة من مجموعات جزئية من S منفصلة مثنى (كل عن الاخرى) واتحادها يساوي S ، وكل عنصر من S ينتمي الى واحدة وواحدة فقط من هذه المجموعات الجزئية المكونة للتجزئة .

في المثال ٤ يكون صفاً التكافؤ [٠] و [١] تجزئة للمجموعة Z لان كل عدد صحيح ينتمي الى المجموعة [٠] أو الى المجموعة [١] و [٠] $\cap$ [١] = $\emptyset$.
وكمثال آخر على صفوف تكافؤ والتجزئات ، خذ المجموعة E المكونة المكونة من كل المحركات
الجزئية المنتهية من ${}^+Z = \{ ١ , ٢ , ٣ , \dots \}$. ففي هذه المجموعة نعد
وفقط اذا احتوت المجموعتان S و V على نفس العدد من العناصر . وص
هو المجموعة .

$$\{ \sim : \sim \supseteq E , \sim \sim \sim \{ ١ \} \}$$

وبهذا فان صف التكافؤ [{ ١ }] هو المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية
التي فيها عنصر واحد :

$$[\{ ١ \}] = \{ \{ ١ \} , \{ ٢ \} , \{ ٣ \} , \dots \}$$

وبالمثل ، تتكون [{ ٢ , ١ }] من كل المجموعات الجزئية .

عنصران بالضبط . والمجموعات { ١١ , ٣ } ، { ٧ , ١١٠ }

كلها عناصر في صف التكافؤ [{ ٢ , ١ }] .

ان التجزئة E المناظرة لعلاقة التكافؤ هذه تتكون من صفوف التكافؤ

الأخرى : [{ ١ }] ، ... لاحظ ان الصف [{ ١ , ٢ , ٣ , \dots }]

المجموعات الجزئية من Z التي فيها من العناصر فقط .

٦ نظرية

لتكن $\sim$ ترمز لعلاقة تكافؤ على مجموعة ما S . فلفوف التكافؤ في S الخصائص التالية

التي تحقق لكل A ، $B \in S$:

أ. $A \in S$: كل عنصر من S ينتمي لصف تكافؤ .

ب. إذا كانت $A \cap B \neq \emptyset$ فإن $A = B$.

ج. إذا كانت $A \neq B$ ، $A \cap B = \emptyset$ ، ليس لصفين مختلفين عناصر مشتركة

د. $A = B$ إذا وفقط إذا كان $A \sim B$

هـ. $A \cap B = \emptyset$ إذا وفقط إذا كان $A \not\sim B$.

برهان الخاصية أ

بما أن $A \sim A$ لكل $A \in S$ (انعكاسية) فيجب أن نحصل على $A \in S$

برهان الخاصية ب

خذ $S \in S$. فمن تعريف صف التكافؤ $S \sim A$ و $S \sim B$ ينتج أن $A \sim B$.

(لماذا ؟) لبرهنة $A = B$ لنبدأ بأخذ $A \in S$ وهكذا فإن $A \sim A$ ، وبما أن $A \sim B$ فإن $A \sim B$. لهذا فإن $A \in B$ و $B \subseteq A$.

وبنفس الطريقة نثبت أن $B \subseteq A$ ومن ثم يتبع أن $A = B$.

وتترك براهين الخصائص الثلاث الباقية (ج ، د ، هـ) كتمارين . والخاصية د مفيدة بوجه خاص عندما نتعامل مع صفوف تكافؤ .

والنظرية التالية تنتج عن الخاصيتين ٦ أ و ٦ ج لعلاقة التكافؤ .

٧ نظرية

إذا كانت $\sim$ علاقة تكافؤ على المجموعة S ، فإن المجموعة المكونة من كل صفوف التكافؤ $[A]$ حيث $A \in S$ تجزئة للمجموعة S .

وبعكس النظرية ٧ نحصل على النظرية التالية :

٨ نظرية

أي تجزئة معطاه لأي مجموعة S تعطي علاقة تكافؤ $\sim$ على S . وتتكون التجزئة المعطاة من صفوف التكافؤ $[A]$ للعلاقة $\sim$.

مجل البرهان

عرف العلاقة على S بقولك أن $A \sim B$ إذا وفقط إذا كان A و B ينتميان إلى نفس العنصر في التجزئة . برهن أن $\sim$ علاقة تكافؤ . وبرهن بعد ذلك أنه لكل $A \in S$ تكون $[A]$ مساوية لعنصر التجزئة الذي يحتوي على A .

تمارين

١ . صف صفوف التكافؤ لكل من علاقات التكافؤ المعطاة في التمرين ٢ .

- ٢ - برهن الخصائص ح ، د ، و ، هـ للنظرية ٦ .
- ٣ - اكمل برهان النظرية ٨ .
- ٤ - لترمز $\sim$ لعلاقة على مجموعة S .
- اكمل العبارات التالية مستخدماً نتائج في المنطق .
- أ. لا تكون $\sim$ انعكاسية اذا فقط اذا
- ب. لا تكون $\sim$ تماثلية اذا فقط اذا
- ح. لا تكون $\sim$ متعدية اذا فقط اذا
- ٥ - لأول وهلة يبدو ان خاصتي التماثل والتعدي في علاقة التكافؤ تعطيان مجتمعتين خاصية الانعكاسية في العلاقة (ويمكن ان نقول جدلاً انه اذا كانت $A \sim B$ ، فان $B \sim A$ ومن ثم باستخدام التعدي ، $A \sim A$) لماذا لا يكون هذا صحيحاً ؟

الملاحق ٥ الترتيب الحسن والاستقراء

١. الترتيب الحسن

بالبداية نقول ان اي مجموعة جزئية من الاعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ لها عنصر اول او اصغر ، مع ان المجموعة نفسها قد لا يكون لها عنصر اكبر . ونستعمل هذه الفكرة عن اصغر عنصر ، عندما نكتب مثلاً المجموعة الجزئية مثل :

$$\{3, 5, 8, 12, \dots\}$$

حتى ان مجموعة مثل

$$\{s : s \in \mathbb{Z}, s < 12\}$$

لها عنصر اصغر ، هو ١٢ . فلنضع الآن صيغة شكلية تعبر عن افكارنا البديهية.

١ تعريف

١. لتكن S مجموعة جزئية من R . يكون العنصر

$a \in R$ اصغراً او اقل عنصر في S اذا وفقط اذا كان $a \in S$ ، $a \leq s$ لكل $s \in S$.

ب. تسمى المجموعة S من الاعداد الحقيقية حسنة الترتيب اذا وفقط اذا كانت كل مجموعة جزئية غير خالية من S تحتوي على عنصر اصغر . ولنفرض الأولية التالية :

٢ أولية

مبدأ الترتيب الحسن . المجموعة $\mathbb{Z}^+$ المكونة من الاعداد الصحيحة الموجبة مجموعة حسنة الترتيب .

٣ مثال

١. المجموعة المكونة من كل الاعداد الصحيحة الفردية الموجبة حسنة الترتيب . لاثبات هذا لا يكفي ان نلاحظ ان ١ هو اصغر عنصر في S . بل يجب ان نثبت ان لكل مجموعة جزئية غير خالية من S عنصراً اصغراً . فلتكن S مجموعة جزئية غير خالية اختيارية من S . فان $s \in \mathbb{Z}^+$ وباستخدام مبدأ الترتيب الحسن يكون للمجموعة S عنصر اصغر ولهذا تكون S حسنة الترتيب .

ب. ليست المجموعة R حسنة الترتيب لأنه ليس للمجموعة الجزئية .

$$K = \{s : s \in R \text{ و } s > 0\}$$

عنصر صغرى .

حـ . ليكن

$$\mathbb{N} = \{s : s \in \mathbb{R} \text{ و } s \leq 1\}$$

فالمجموعة $\mathbb{N}$ نفسها عنصر اصغر ، هو ١ . بينما لا تحتوى المجموعة الجزئية $\{s : s \in \mathbb{N}\}$ ،

على عنصر اصغر . ولهذا فان $\mathbb{N}$ ليست حسنة الترتيب .

ويكون مبدأ الترتيب الحسن مفيداً في برهنة عبارات على الاعداد الصحيحة . وكمثال على ذلك لنبرهن العرضية التالية التي تفيد في البند ب .

٤ عرضية

مبدأ الاستقراء المنتهي . لتكن $\mathbb{N}$ مجموعة من الاعداد الموجبة بحيث ان

$$1 \in \mathbb{N}$$

ب . لكل r اذا كانت $r \in \mathbb{N}$ ، فان $r + 1 \in \mathbb{N}$.

فتكون $\mathbb{N}$ المجموعة المكونة من كل الاعداد الصحيحة الموجبة .

البرهان : لنفرض ان $z \notin \mathbb{N}$

$$\text{وليكن } s = \{n : n \in \mathbb{N} \text{ و } z \notin \mathbb{N}\} = \mathbb{N} - z$$

فتكون s مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{N}$. وحسب مبدأ الترتيب الحسن تحتوي s على عنصر اصغر s . وس . $1 < s$ حسب الفرضية ١ . ولهذا فان العدد الصحيح $s - 1$ عدد صحيح موجب ليس في s . ومن ثم فان $s - 1 \in \mathbb{N}$. ولكن فرضيته ب تقول ان $s = (s - 1) + 1 \in \mathbb{N}$ ، وهذا يناقض الحقيقة ان $s - 1 \in \mathbb{N}$. فيجب ان نحصل على $s = \emptyset$ و $z \in \mathbb{N}$.

تمارين :

١ . اي من المجموعات التالية حسنة الترتيب ؟ علل اجابتك .

١ . كل الاعداد الصحيحة الزوجية .

ب . كل الاعداد الصحيحة الاكبر من (- ١٠٠)

حـ

$$\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ و } z \notin \mathbb{N} \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ و } z \notin \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$$

(إذا كانت اجابتك عن الجزئين ح و د مختلفة ، اقرأ بانتباه تعريف المجموعة حسنة الترتيب .)

٢ . اي من المجموعات التالية حسنة الترتيب ؟ علل اجابتك .

أ . الاعداد الزوجية الصحيحة الموجبة .

ب . $\{s : s \in \mathbb{Z} \text{ و } s \leq 1\}$ حيث 1 عدد صحيح ثابت .

ح . Q المجموعة المكونة من كل الاعداد النسبية .

د . $Q^+ = \{s : s \in \mathbb{Q} \text{ و } s < 0\}$

هـ . $\{s : s \in \mathbb{Q} \text{ و } s \leq 0\}$

(إذا اختلفت الاجابات عن الجزئين د و هـ ، فاقراً باهتمام تعريف المجموعة حسنة الترتيب)

و . $\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\}$

٣ . برهن ان كل مجموعة جزئية من مجموعة حسنة الترتيب تكون حسنة الترتيب .

٤ . برهن ان اي مجموعة منتهية من الاعداد الحقيقية تكون حسنة الترتيب .

ب. الاستقراء

في الرياضيات ، كثيراً ما يبدي شخص ما ملاحظة تقود الى حدس وقد تكون الملاحظة مثلاً ان مجموع اول ثلاثة او اربعة اعداد صحيحة فردية موجبة مربع كامل .

$$16 = 1 + 3 + 5 + 7 \quad \text{و} \quad 9 = 1 + 3 + 5$$

وبعدها يمكن ان يسأل شخص لأي عدد من حواصل الجمع المشابهة للاعداد الصحيحة الفردية يمكن ان يحصل هذا . هل صحيح لكل قيم n ان

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 ؟$$

ان هذه العبارة البسيطة ظاهرياً تشتمل على عدد لانهائي من العبارات التي يكون من الواجب فحصها او برهنتها : $1 = 1$ ، $1 + 3 = 4$ ، $1 + 3 + 5 = 9$ ، وهكذا . كيف يمكن عمل هذا ؟ هنا يلعب الاستقراء دوراً في الرياضيات . انها تتيح للشخص ان يبرهن عدداً لا نهائياً من العبارات بسرعة فائقة (وتقود احياناً الى اكتشاف تلك العبارات) .

وبصورة عامة ، نستعمل الرموز ف ، ف ، ف ، وهكذا لتعني العبارات التي نريد

برهنتها .

نظرية :

مبدأ الاستقراء الرياضي . لتكن $\{F_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ مجموعة من عرضيات معرفة لكل n

۱۷ بحیث ان

٢. ف، تكون صائبة و

ب. لكل عدد صحيح $r < 1$ اذا كانت r صحيحة ، فان $r+1$ تكون صحيحة فتكون r صحيحة لكل عدد صحيح $n \leq 1$.

في مبدأ الاستقراء الرياضي تتكون الفرضية من العبارتين ^١ و ب . وتؤكد النتيجة ان في تكون صحيحة لكل $n \leq ١$.

برهان الاستقراء الرياضي

افرض ان $f_1, f_2, \dots, f_r$ تحقق فرضيات مبدأ الاستقراء . نريد ان نبرهن النتيجة :
 فن صحيحة لكل $n \leq 1$. لقد برهنا في بند 1 انه اذا كانت Σ مجموعة من الاعداد
 الصحيحة الموجبة بحيث ان $(1) \exists \Sigma$ و $(2) \exists r$ يتضمن ان $r + 1 \in \Sigma$ ،
 فتكون Σ المجموعة المكونة من كل الاعداد الصحيحة الموجبة وتتيح لنا فرضيات الاستقراء
 الرياضي (النظرية 5) تعريف اي مجموعة Σ تحقق هذه الشروط .

لتكن $\mathcal{V} = \{ \mathbf{n} : \mathbf{f}_n \text{ تكون صائبة} \}$. فمن فرضية الاستقراء نرى (٢) ان $\mathcal{V} \neq \emptyset$ و (ب) $\mathcal{V} \neq \emptyset$ ينتج ان $\mathcal{V} \neq \emptyset$. ولهذا فان الفرضية ٤ (البند ٢) تخبرنا ان $\mathcal{V} = \mathbb{Z}^+$. ومن ثم فان $\mathbf{f}_n$ تكون صائبة لكل عدد صحيح موجب n . والاستقراء الرياضي هو مبدأ تفاعل متسلسل . ولاستخدام هذا المبدأ نحتاج الى معرفة ان التفاعل المتسلسل يمكن ان يبدأ (اي ان تكون $\mathbf{f}_n$ صائبة) وانه مستمر عند كل مرحلة (اي ان صواب $\mathbf{f}_r$ ينتج عنه صواب $\mathbf{f}_{r+1}$) . وببدء السلسلة من $\mathbf{f}_1$ نجد ان $\mathbf{f}_1$ تتضمن $\mathbf{f}_2$ ، $\mathbf{f}_2$ تتضمن $\mathbf{f}_3$ ، $\mathbf{f}_3$ تتضمن $\mathbf{f}_4$ ، وهكذا .

تذكر انه لكي نبرهن مجموعة من العبارات $\{f_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ مستخدما مبدأ الاستقراء الرياضي فعليك ان تقوم بعمل شيئين :

١. اثبت ان f_1 تكون صائبة .

ب. برهنه انه لكل $r \in \mathbb{K}$, f_r تتضمن f_{r+1}

لعمل ذلك افرض ان Γ تكون صائبة حيث Γ اختيارية ولكنها ثابتة وبرهن بعد ذلك Γ فمثلا لنبرهن العبارة

$$r_n = (1 - n^2) + \dots + 5 + 3 + 1$$

لكل $n \in \mathbb{Z}^+$.

لترمز فـ^١ الى العبارة اعلاه ، لكل عدد صحيح موجب ن . ولذا فبالكلمات نقول فـ^١ ن مجموع أول ن من الاعداد الصحيحة الفردية الموجبة هو ن^٢ . وبما ان ١ = ١^٢ فتكون فـ صائبة . فلنفرض ان فر تكون صائبة ، اي ان

$$١ + ٣ + ٥ + \dots + (٢ - ١) = ٢$$

ونريد ان نبرهن ان فر^١ صائبة ، اي ان :

$$١ + ٣ + \dots + (٢ - (١ + ر)) = (١ + ر)^٢$$

من العبارة فر نحصل على

$$١ + ٣ + \dots + (٢ - ر) + (٢ - (١ + ر)) = (١ + ر)^٢$$

ولهذا فالعبارة فر^١ متضمنة في العبارة فر . وبعدها فان مبدأ الاستقراء الرياضي يذكر

انه لكل عدد صحيح موجب ن ، تكون فـ صائبة .

في المثال السابق نجعل فـ اسماً لكل المقولة

$$١ + ٣ + ٥ + \dots + (٢ - ن) = ن^٢$$

لاحظ ان فـ ليست فقط

$$١ + ٣ + \dots + (٢ - ن)$$

وليس صحيحاً ان تكتب

$$١ + ٣ + ٥ + \dots + (٢ - ن) = فـ$$

والعبارة فـ : ن = ن + ١ تبين لماذا يكون ضرورياً اثبات انه يجب التحقق من كلا

الشرطين في الفرضية الاستقراء . فهنا بالتأكيد ان فر خطأ ، ولكن لو فرضنا ان فر :

$$١ + ر = فـ$$

$$١ + (١ + ر) = ١ + ر + ١$$

تمارين :

لنأخذ المجاميع التالية :

$$٢ + ٤ + ٦ + \dots + ٢ن$$

$$١ + ٢ + ٣ + \dots + ن$$

$$٢١ + ٢٢ + ٢٣ + \dots + ٢ن$$

ولنفتش على صيغة بسيطة بدلالة ن لكل من هذه المجاميع . لايجاد هذ الصيغ احسب حاصل

الجمع المشار إليه واملأ الاجابات في الجدول ٦

ن	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
$\sum_{r=1}^n r$					٤٢			
$\sum_{r=1}^n r^2$					٢١			
$\sum_{r=1}^n r^3$					٤٤١		xxx	

الجدول ٢

اذكر صيغ نتائج بدلالة ن

$$\underline{\hspace{10cm}} = \sum_{r=1}^n r$$

$$\underline{\hspace{10cm}} = \sum_{r=1}^n r^2$$

$$\underline{\hspace{10cm}} = \sum_{r=1}^n r^3$$

ب. برهن بالاستقراء الصيغة $\sum_{r=1}^n r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ج. برهن الصيغة $\sum_{r=1}^n r^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

د. برهن الصيغة $\sum_{r=1}^n r^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

٢ - برهن بالاستقراء العبارة

$$\underline{\hspace{10cm}} = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

٣ - خذ $n \in \mathbb{N}$. ضع $P_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. ا لكل عدد صحيح $n \geq 1$.

والآن لتكن m اي عدد صحيح موجب ثابت. استعمل استعمل الاستقراء على n لبرهان ان

$$P_m = 1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

- ب. $(\mathbb{P})^{\mathbb{P}} = \mathbb{P}$ لكل عدد صحيح $n \leq 1$
٤. ليكن $\mathbb{P}$ ، $\mathbb{B}$ ، $\mathbb{R}$. اثبت ان $(\mathbb{P})^{\mathbb{P}} = \mathbb{P}$ لكل عدد صحيح $n \leq 1$.
٥. يبين هذا التمرين ان من الضروري فحص كلا الجزئين من فرضيات الاستقراء حاول . ان تبرهن بالاستقراء العبارات التالية غير الصحيحة .
- بين في كل عبارة ان احدي فرضيات مبدأ الاستقراء تتحقق ولكن الاخرى لا تتحقق .
- أ. $2 + 4 + \dots + 2n = n(n+1) + 2$
- ب. $1 + 2 + \dots + (2n-1) = n^2$
٦. يدعي الطلبة احياناً ان مبدأ الاستقراء باطل ويقولون ان المبدأ يستلزم ان نسلم بصحة النتيجة لكي نبرهنها ولييان ان هذا الاعتراض غير قائم ، قارن الجزء ب من فرضيات الاستقراء مع نتيجة للمبدأ واستخدام النقطتين أ ، ب في تعريف الاستقراء .
٧. اكمل العبارة التالية وبرهن انها تكون صائبة لكل $n \in \mathbb{Z}^+$:
- المجموعة المكونة من n من العناصر عدد من المجموعات الجزئية قدرها _____ .
- تذكر ان المجموعة الخالية تعد مجموعة جزئية .
٨. برهن العبارة التالية : لكل $\mathbb{P}$ ، $\mathbb{R} \in \mathbb{Z}^+$ حيث ان $1 < \mathbb{P}$ يوجد عدد صحيح $n \in \mathbb{Z}^+$ بحيث ان $\mathbb{P}^n < \mathbb{R}$.
٩. برهن انه لكل $\mathbb{P}$ ، $\mathbb{R} \in \mathbb{Z}^+$ يوجد $n \in \mathbb{Z}^+$ بحيث ان $\mathbb{P} < \mathbb{R}$.

ح. صيغ اخرى لمبدأ الاستقراء

- في البراهين بالاستقراء كثيراً ما يكون مفيداً او ضرورياً بدء العملية بعدد صحيح مخالف للعدد ١ . فمثلاً ، لنفرض اننا نريد اثبات المتباينة $2^n \leq 1 + n$.
- بما ان $2^1 = 1 + 1$ ، فالمتباينة ليست صائبة للعدد $n = 1$.
- وزيادة على ذلك ، فهي ليست صائبة للعدد $n=2$ الا انها صائبة للعدد $n = 3$. ولهذا فلا نستطيع تطبيق مبدأ الاستقراء المذكور في النظرية ٥ (البند ب) بدون تعديل . ولكن نستطيع تدبير هذه المسألة اذا جعلنا عباراتنا بالصيغة
- فن : $(2 + n)^2 \leq 2 + (n + 2)$ ($n \in \mathbb{Z}^+$)
- او اذا بررنا صيغة جديدة لمبدأ الاستقراء الذي يسمح لنا بالبدء بأي عدد صحيح . لنأخذ المسار الثاني للعمل لانه يتيح لنا معالجة عدة مسائل حسب النص ، لا مجرد خطوات معادة مكررة . والنظرية التالية صيغة اخرى لمبدأ الاستقراء .

٦ نظرية :

ليكن n اي عدد صحيح ولتكن f ن القضية المعرفة لكل عدد صحيح $n \leq n$ بحيث ان
 أ. f تكون صائبة و

ب. لكل عدد صحيح $r \leq n$ فصواب f يقتضي صواب f_{r+1}
 فان f تكون صائبة لكل عدد صحيح $n \leq n$.

البرهان :

لتكن S المجموعة المكونة من كل الاعداد الصحيحة الموجبة n بحيث ان القضية f_{n+1} تكون صائبة وكننتيجة للفرضية أ ينتج ان $1 \in S$. ويتبع من فرضية ب انه اذا كان $r \in S$ ، فان $r+1 \in S$ ، لان الصواب f_{n+r-1} يتضمن صواب

$$f_{(n+r-1)+1} = 1 + f_{(n+r-1)}$$

ولكن العرضية ٤ (البند ٢) تذكر ان S تكون المجموعة المكونة من كل الاعداد الصحيحة الموجبة . ومن ثم فان f_{n+1} تكون صائبة لكل عدد صحيح موجب n ، وبهذا فان f تكون صحيحة لكل الاعداد الصحيحة $n \leq n$. وكمثال على استعمال هذه الصيغة لمبدأ الاستقراء لنبرهن المتباينة $2^n \leq 1 + n$ لكل $n \leq 3$. وكما لاحظنا فان المتباينة لا تتحقق للعديدين $n = 1, 2$. ولكن $2^3 = 8 \leq 9 = 1 + (3)$ ، ولهذا فان العبارة

f : $n \leq 2^n + 1$ تكون صائبة للعدد $n = 3$. لنفرض ان f صائبة لعدد ما $r \leq$

٣ . فيكون $2^r + 1 \leq 2^{r+1} + 1$ ومن ثم فان

$$\begin{aligned} (1 + r) &= 2^r + 2^r + 1 < 2^r + (1 + r) + 1 < 2^r + 2 + (1 + r) \\ &= 2^r + (1 + r) + 2 = 2^r + 2 + (1 + r) \\ &\leq 2^r + (1 + r) + 6 \\ &< 2^r + (1 + r) + 1 \end{aligned}$$

ولهذا فاذا كانت f صائبة فان f_{r+1} تكون صائبة وان النظرية ٦ تذكر ان f : $n \leq 2^n + 1$ تكون صائبة لكل $n \leq 3$.

بالاضافة للتوزيع المذكور في النظرية ٦ هناك صيغة ثانية لمبدأ الاستقراء . وهذه الصيغة الثانية تفيد بشكل خاص في برهان النظرية الرئيسية في الحساب ، المذكورة والمبرهنة في البند ٦ هـ .

٧ نظرية

المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي . لتكن f قضية معرفة لكل عدد صحيح $n \leq 1$ بحيث ان
 أ. f تكون صائبة و

ب. لكل عدد صحيح $r \leq 1$ اذا كانت f_r ، فـ f_{r+1} . . . ، f_r كلها صائبة فان f_{r+1} تكون صائبة .

فتكون فان صائبة لكل عدد صحيح $n \leq 1$

البرهان :

لتكن $\mathbb{N}$ المجموعة المكونة من كل الاعداد الصحيحة الموجبة بحيث ان $\mathbb{N}$ تكون صائبة
افرض ان $\mathbb{N} \neq \emptyset$. فللمجموعة $\mathbb{N}$ - $\mathbb{N}$ عنصر اصغر و (اي ان أصغر عنصر بحيث ان $\mathbb{N}$
تكون خطأ) ، و $1 \leq n$ لان $1 \in \mathbb{N}$ حسب الفرضية $\mathbb{N}$. ولهذا فان $1 \in \mathbb{N}$ ، $2 \in \mathbb{N}$ ، ... ، $n \in \mathbb{N}$ ،
تكون كلها صائبة لان و يكون اصغر عنصر لا ينتمي الى $\mathbb{N}$. وكنتيجة الفرضية $\mathbb{N}$ ، يجب ان
تكون $\mathbb{N}$ صائبة ويعطينا هذا التناقض المطلوب . وهكذا فان $\mathbb{N} = \emptyset$ ، فان صائبة لكل الاعداد
الصحيحة الموجبة .

تمارين :

١ - لاحظ ان الفرضية $\mathbb{N}$ لمبدأ الاستقرار الثاني (النظرية ٧) هي طريقة قصيرة لكتابة قائمة غير
منتهية من التضمينات . اكتب هذه التضمينات للاعداد $r = 1, 2, 3, 4$. ولجعل المبدأ
يظهر معقولا ، افترض ان القضايا $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{N}$ ، ... تحقق فرض المبدأ الثاني
للاستقراء .

اثبت مباشرة (دون استخدام النتيجة) ان $\mathbb{N}$ صائبة بتكرار استخدام الفرض .

٢ - لتكن $\mathbb{N}$ فان هي القضية $\mathbb{N} \leq \mathbb{N}$. اثبت ان $\mathbb{N}$ تكون صائبة لكل عدد صحيح
 $n \leq \mathbb{N}$.

٣ - برهن ان العبارة $\mathbb{N} : \mathbb{N} \leq \mathbb{N}$! ($\mathbb{N} \leq \mathbb{N}$) تكون صائبة لكل عدد صحيح $n \leq \mathbb{N}$
(العدد n ! يكون حاصل الضرب المكون من كل الاعداد الصحيحة الموجبة من
١ الى n . لهذا فان $n ! = (1) (2) (3) \dots (n-1) (n)$) .

٤ - اعط برهاناً بديلاً للنظرية ٦ مستخدماً المبدأ الأول للاستقراء الرياضي (النظرية ٥) .

الملاحق ٦ بعض الخصائص الحسابية للاعداد الصحيحة

يبحث هذا الملحق ف خصائص حسابية للاعداد الصحيحة لها علاقة بالقسمة .
فيبحث البند أ برموز قسمة الاعداد الصحيحة ، ويمضي البند ب لخوارزمية القسمة . وفي
البند ج نبين ان اي عددين صحيحين لهما قاسم مشترك أعظم ، وفي البند د نعطي
خوارزمية ليجاد هذا القاسم المشترك الاعظم . والبند النهائي لهذا الملحق يذكر النظرية
الرئيسية في الحساب ويعطي اطاراً لبرهان لها .
تتطلب البراهين لبعض النظريات الرئيسية في هذا الملحق معرفة الاستقراء والترتيب الحسن
، اللذين درسا في الملاحق ٥ . وان تكن نصوص النظريات لا تتطلب ذلك فتستطيع اذا شئت
ان تحذف البراهين في اول قراءة لك للملحق .

١ . القسمة :

نبدأ بالتعريف وبعض الرموز المفيدة .

١ تعريف :

يكون العدد الصحيح ب عاملاً ، او قاسماً للعدد الصحيح أ اذا وفقط اذا كان $A = B \cdot K$ حيث ك
عدد صحيح . واذا كان ب عاملاً او قاسماً للعدد أ ، نقول ايضاً ان أ تكون من مضاعفات ب أو
ان أ تقبل القسمة على ب . ويعني الرمز $A \mid B$ ان ب تقسم العدد أ، ونكتب $A \nmid B$ اذا وفقط اذا
كان ب لا يقسم العدد أ .

تحذير

يجب ان لا يكون هناك التباس بين الرمز $A \mid B$ والكسر A/B .
بما ان $6 = 2 \cdot 3$ ، ينتج ان $2 \mid 6$. وبالطريقة نفسها نرى ان $(-5) \mid 30$ و $7 \mid (-21)$
ولكن $4 \nmid 9$. واي عدد صحيح $A \neq 0$ يقبل القسمة على ١ ، -١ ، ١ ، -١ ، ١ ، -١ .

٢ تعريف :

يسمى العدد الصحيح د $d < 1$ عدداً اولياً اذا وفقط اذا كان للعدد د القواسم ١ ، -١ ، د ، -د .
فقط .

من الامثلة على الاعداد الاولية : ٢ ، ٣ ، ٥ و ٧ .

تمارين :

كل المسائل التالية ضمن المجموعة Z المكونة من الاعداد الصحيحة .

- ١ - برهن ان العلاقة « هو قاسم لـ » في Z هي علاقة انعكاس وتعد وليس تماثلاً .
- ٢ - برهن انه اذا كان أ و ب عددين صحيحين موجبين بحيث ان $A \mid B$ فان $A \leq B$.

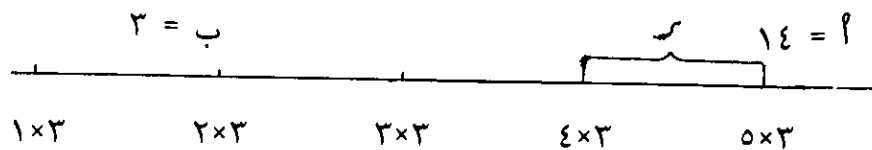
- ٣ - برهن انه اذا كان $A \mid 1$ ، فان $1 = A$.
- ٤ - برهن انه اذا كان $A \mid B$ و $B \mid A$ فان $A = B$.
- ٥ - لكل من العبارات التالية أعط برهاناً او مثالا عكسياً .
 أ. اذا كان $A \mid B$ و $A \mid C$ ، فان $A \mid (B + C)$.
 ب. اذا كان $A \mid (B + C)$ ، فان $A \mid B$ أو $A \mid C$.
 ج. اذا كان $A \mid C$ و $B \mid C$ ، فان $A \mid (B + C)$.
 د. اذا كان $A \mid C$ و $B \mid C$ ، فان $A \mid B$.
 هـ. اذا كان $A \mid B$ ، فان $A \mid B + C$ لكل C .
 و. اذا كان $A \mid B + C$ فان $A \mid B$ أو $A \mid C$.
- ٦ - جد كل الاعداد الاولى الاقل من ١٠٠ . ان احدى الطرق لعمل ذلك هي ان تعمل جدولاً او قائمة بالاعداد من ٢ الى ١٠٠ ثم ضع دائرة عند ٢ وتحذف كل مضاعفات ٢ . وكرر هذه العملية مع ٣ . واستمر بالعملية . متى يمكنك التوقف ؟ وتعرف هذه الطريقة لاجاد الاعداد الاولى بمنخل إراتستينس

ب. خوارزمية القسمة :

اذا كان A ، B عددين صحيحين ، $B \leq A$. نستطيع التعبير عن A كحاصل جمع أحد مضاعفات B الى عدد آخر يسمى الباقي . تسمى هذه العملية خوارزمية القسمة وهي معرفة كما يلي :

٣ نظرية :

اذا كان A ، $B \in \mathbb{Z}$ ، $B \leq A$ ، B عددان صحيحان ، R وحيدان بحيث ان $A = B \cdot Q + R$ ، $0 \leq R < B$. يسمى العدد الصحيح R بالباقي . فمثلاً ، اذا كان $A = 14$ و $B = 3$ ، فان $14 = 3 \times 4 + 2$. ويمكن تمثيل هذه النتيجة على خط الاعداد بتعيين موضع العدد الصحيح A بين مضاعفات متتالية للعدد B . ويصور الباقي بالمسافة بين A واكبر مضاعفات B على يسار A (انظر الشكل ١)



الشكل ١

لاحظ انه عند قسمة - ٢٥ على العدد ٧ بهذه الخوارزمية ليس صحيحاً ان نكتب الاجابة بالشكل

$$- ٢٥ = ٧ (٣ -) + (٤ -)$$

يجب ان يحقق الباقي ر المتباينة : $٠ \leq r < ٧$. وبهذا تكون الاجابة السليمة

$$- ٢٥ = ٧ (٤ -) + ٣$$

تمرين :

كامثلة اخرى جد خارج القسمة والباقي في خوارزمية القسمة لكل زوج من القيم المعطاة للعددين ١ و ٢ وضع النتيجة على خط الاعداد

١ :	٢٥	-	٢٥	٣	-	٣	٢٤	-	٢٤	٠
٢ :	٧		٧	٤		٤	٨		٨	٥

لتكن ١ ، ب $\exists z$ حيث ب ≤ ٠ . في برهان خوارزمية القسمة نجد اولاً العددين الصحيحين ك و ر بحيث ان $١ = ب ك + ر$ و $٠ \leq r < ب$. وعند اتمام ذلك نبرهن الوحداية لهذين العددين الصحيحين .

الحالة ١

افرض ان $١ \leq ٠$ ، وفي الحقيقة ، خذ $١ = ن$ فنبرهن وجود العددين ك ، ر بالاستقراء على ن مع اعتبار ب ثابتاً .

لتكن فن القضية للعدد الصحيح الثابت ب يوجد عدداً صحيحان ك ، ر بحيث ان $١ = ب ك + ر$ ، $٠ \leq r < ب$.

وبما ان $٠ = ب (٠) + ٠$ ، فتكون فـ صائبة (اذا كنت تفضل البدء بالعدد ن = ١ ، فبرهن ان فـ تكون صائبة) . افرض ان فـ تكون صائبة لعدد صحيح و $٠ \leq ٠$ (اي افرض انه يوجد عدداً صحيحان ك ، ر بحيث ان $١ = ب ك + ر$ ، $٠ \leq r < ب$) . فيجب ان نبرهن الان ان فـ_١ تكون صائبة . لاحظ ان

$$١ + ١ = ب ك + ر + ١$$

فاذا كانت ر + ١ $> ب$ فان فـ_١ تكون صائبة . واذا كانت ر + ١ = ب . فان

$$١ + ١ = ب (ك + ١) + ٠$$

وهنا ايضاً تكون فـ_١ صائبة . فبالاستقراء الرياضي ثبت ان فن صائبة لكل عدد صحيح ن ≤ ٠ .

الحالة ٢

افرض ان $\alpha > 0$ ، ضع $\alpha = -$ ، حيث $\alpha < 0$. وكننتيجة من الحالة ١ هنالك عددان صحيحان k و r حيث ان $\alpha = b + k + r$ ، $0 \leq r < b$.

ولكن هنا

$$\alpha = - = b + (k - r)$$

فاذا كانت $r = 0$ ، تكون $\alpha = b + (k - r)$ ، وينتهي الامر . واذا كانت $0 < r < b$ ، فان

$$\alpha = b + (k - r) + (b - r)$$

ويحقق الباقي الجديد : $b - r$ المتباينة . $b - r < b$.

ويمكن برهنة وجودية العددين k و r باستخدام مبدأ الترتيب الحسن أو مبدأ الاستقراء الثاني . لنبرهن الان وحدانية العددين k و r في خوارزمية القسمة : افرض ان α ، b ، k ، r ، r_1 حيث $0 \leq r < b$.

$$\alpha = b + k + r \quad (0 \leq r < b)$$

$$\alpha = b + k_1 + r_1 \quad (0 \leq r_1 < b)$$

فيجب ان نبرهن ان $k = k_1$ ، $r = r_1$.

نفرض ان $r \neq r_1$ (وهذه مجرد مسألة هامشية) . وكننتيجة لفرضنا نحصل على ان

$$b + k = b + k_1 + r_1$$

ويتبع منه ان

$$b + k = b + k_1 + r_1 \Rightarrow k = k_1 + r_1 - r$$

وبما ان $r_1 < b$ فان $r_1 - r < b$ فلذا يكون

$$0 \leq r_1 - r < b \Rightarrow k = k_1 + (r_1 - r)$$

ومن ثم $k - k_1 = r_1 - r$ (تذكر ان $0 \leq r_1 - r < b$) وفي الواقع يجب ان يكون العدد الصحيح $k - k_1$

صفرأ (اذا كان $k - k_1 \neq 0$ فان $1 \leq k - k_1 \leq b$) . ومن هنا $r_1 - r = 0$

ونكون قد انتهينا من البرهان

تمارين :

- ١ - خذ α ، $b \in \mathbb{Z}$ حيث $0 < b$. بين انه اذا ازلنا التقويد $0 \leq r < b$ في خوارزمية القسمة فيمكن ان يوجد عدد لا نهائي من القيم للعددين k و r حيث $\alpha = b + k + r$.

٢ . استخدم النظرية ٣ لبرهنة الصيغة الأعم من خوارزمية القسمة التالية :
 اذا كان A و $B \in Z$ حيث $B \neq 0$ فيوجد عدنان صحيحان وحيدان K و R بحيث ان $A = BK + R$ ، $0 \leq R < |B|$.

ج . القواسم المشتركة العظمى

نبرهن في هذا البند انه لاي عددين صحيحين مخالفين للصفر قاسم مشترك اعظم وانه يمكن التعبير عن هذا القاسم كتوفيق خطي للعددين الصحيحين وفي البند د تعطي خوارزمية لايجاد هذا القاسم المشترك الاعظم والتوفيق الخطي المحدد . ولكن نعالج اولاً برهان الوجودية .
 وخلال البنود ح ، د و ه سترمز الاحرف مثل A ، B ، C ، D ، F ، K ، R الى اعداد صحيحة (سواء وضعت لها ارقام سفلية او لم توضع) .

٤ تعريف

ليكن A و B عددين صحيحين غير الصفر . يسمى العدد الصحيح D قاسماً مشتركاً اعظم (للاختصار $Q.M.A$) للعددين A و B اذا وفقط اذا :

- ١ . A كان د موجباً .
 - ٢ . B . A قاسماً للعددين A و B .
 - ٣ . C . A كان كل قاسم لكل من العددين A ، B قاسماً للعدد D .
- ويمكن كتابة الشروط التي تعرف القاسم المشترك الاعظم لعددين A و B بالرموز كما يلي :
- ١ . $D \leq A$.
 - ٢ . $D \mid A$ و $D \mid B$.
 - ٣ . اذا كانت $D \mid A$ و $D \mid B$ ، C ان $D \mid C$.
- وغالباً ما يرمز للقاسم المشترك الاعظم D للعددين الصحيحين A و B بالرمز $D = Q.M.A (A, B)$.

٥ تعريف

نقول ان العددين A و B يكونان اوليين نسبياً اذا وفقط اذا كان $Q.M.A (A, B) = 1$

٦ مثال

القواسم المشتركة للعددين ٢٠ و ٣٠ هي ١ ، ٢ ، ٥ ، ١٠ .

نلاحظ من هذه القائمة انه اذا كان $ح | ٢٠$ و $ح | ٣٠$ فان $ح | ١٠$.
ولهذا فا ١٠ تكون ق.م.أ. للعديدين ٢٠ و ٣٠ .

تمرين

جد كل القواسم المشتركة لكل من ازواج الاعداد التالية وجد القاسم المشترك الاعظم و اشر الى اي زوج من عددين اوليين نسبياً .

$$أ : ٢٠ - ٣٠ - ٦٠ - ٢٠ - ١٥$$

$$ب : ٢٤ - ٣٦ - ٩٠ - ٢٩ - ٣٤$$

استعمل التعريف لاثبات ان ٢ ليس قاسماً مشتركاً أعظم للعديدين ٢٠ و ٢٤ .

قبل برهان الوجود للقاسم المشترك الاعظم للعديدين أ و ب نثبت نظرية مساعدة مهمة

٧ نظرية

لتكن $ص$ مجموعة جزئية غير خالية من الاعداد الصحيحة بحيث ان $ص$ تكون معلقة بالنسبة للطرح . فان $ص = \{٠\}$ أو $ص$ تحوي عنصراً أصغر موجباً $ك$ وهي المجموعة المكونة من كل المضاعفات الصحيحة للعدنان $ك$ ، اي ان :

$$ص = \{ن : ك : ن \in \mathbb{Z}\}$$

البرهان

نلاحظ من الفرض انه يوجد عدد ما $أ \in ص$ وان $أ - أ = ٠ \in ص$

فلكل $أ \in ص$ نحصل على $٠ = أ - أ \in ص$ ولهذا فلكل $أ$ ، $ب \in ص$ ،

$$أ - (ب - ب) = أ + ب \in ص .$$

ويبين هذا ان $ص$ تكون زمرة بالنسبة للجمع (الجمع التجميعي على $ص$ لان عناصر $ص$ اعداد صحيحة) .

افرض ان $ص \neq \{٠\}$. فتحتوي $ص$ على عنصر موجب . (لماذا ؟)

وكنتيجة لمبدأ الترتيب الحسن (الملاحق ٥) فان للمجموعة غير الخالية

$$\{س : س \in ص ، س \leq ٠\}$$

عنصراً أصغر $ك \in ص$. وبما ان $ص$ تكون زمرة بالنسبة للجمع ، فالمجموعة

$$\{ن : ك : ن \in \mathbb{Z}\}$$

محتواة في $ص$. ونريد ان نثبت ان $ص \supseteq \{ن : ك : ن \in \mathbb{Z}\}$. خذ $س \in ص$.

سنثبت ان $س \in \{ن : ك : ن \in \mathbb{Z}\}$ فان فبما ان خوارزمية القسمة تتضمن وجود عددين

$ن$ و $ر$ بحيث ان $س = ن + ر$ ، $٠ \leq ر < ن$. وبما ان $ن \in ص$ و $س \in ص$ فان $ر = س - ن \in ص$ ايضاً . ولكن $ك$ العنصر الاصغر الموجب في $ص$ ، $٠ \leq ر < ك$ ولذا فان $ر = ٠$ و $س = ن \in ص$.

= ن ك حيث ن أحد الاعداد الصحيحة . ومن ثم فان $\{n : n \in Z\} \supseteq \{n : n \in Z\}$. وهكذا يكمل برهان ان $\{n : n \in Z\} = \{n : n \in Z\}$. وهكذا يكمل برهان ان $\{n : n \in Z\} = \{n : n \in Z\}$. ان وجودية القاسم المشترك الاعظم للعديدين الصحيحين المخالفين للصفر ووحدانيته تضمنها النظرية التالية :

٨ نظرية

لاي عددين صحيحين a و b مخالفين للصفر قاسم مشترك اعظم وحيد . اصف الى ذلك ان هناك عددين صحيحين c و d بحيث ان $q = m \cdot a + n \cdot b$. وهكذا يكمل برهان ان $\{n : n \in Z\} = \{n : n \in Z\}$. ان القاسم المشترك الاعظم للعديدين a و b كتوفيق خطي للعديدين a و b .

٩ مثال

يكون $q = m \cdot a + n \cdot b$. للعديدين 6 و 27 هو 3 . ولأن $3 = 6(-4) + 27(1)$ يمكننا ان نكتب

$q = m \cdot a + n \cdot b = 6(-4) + 27(1)$ حيث $d = -4$ و $c = 1$.

لاحظ ايضاً ان $3 = 6(0) + 27(1)$

ولهذا فلا يكون d و c وحيدين .

برهان النظرية ٨ .

ليكن

$$\{n : n \in Z\} = \{n : n \in Z\}$$

ان المجموعة $\{n : n \in Z\}$ مغلقة بالنسبة للطرح لان في الاعداد الصحيحة d, c, k, l و k, l

$$(c + kd) - (l + ld) = (c - l) + (k - l)d$$

والصيغة الاخيرة عنصر في $\{n : n \in Z\}$. ومن النظرية ٧ يوجد عدد صحيح موجب d بحيث ان

$$\{n : n \in Z\} = \{n : n \in Z\}$$

وبما ان $d \in \{n : n \in Z\}$ فيضمن تعريف $\{n : n \in Z\}$ انه يوجد عدنان صحيحان c و k بحيث ان $d = c + kd$

k, l و b عنصران في $\{n : n \in Z\}$. (لماذا ؟) . ولكن بما ان $\{n : n \in Z\} = \{n : n \in Z\}$ ، فان a

m, k, l و $b = n$ حيث m, n عدنان صحيحان . ويثبت هذا ان $a \mid c + kd$ ، $a \mid b$. ولاشبات n

$d = q = m \cdot a + n \cdot b$ ، لنفرض ان $a \mid c + kd$ ، $a \mid b$. فيوجد عدنان صحيحان ، هو e, f ،

بحيث ان $a \mid e = c + kd$ ، $a \mid f = b$ ومن ثم فان

$$d = c + kd = (e - kf) + kd = e + (k - f)d$$

اي ان $d \mid d$. وهذا يكمل برهان الوجودية لـ $d = \gcd(a, b)$.

واخيراً افرض ان d ، هما قاسمان مشتركان لأعظم للعددين a و b . فبما ان d قاسم للعددين a و b ، d قاسم مشترك اعظم للعددين a و b فيجب ان نحصل على $d \mid a$. وبالمثل $d \mid b$. ومن هنا فان $d = e$ (انظر التمرين ٤ في البند a) . وبما ان $d \leq e$ ، $e \leq d$. فيجب ان يكون $d = e$.

تمارين

- ١ - لكل زوج من الاعداد a و b في التمرين الذي يتبع المثال ٦ ، عبر عن q ، m . a (b ، a) كتوفيق خطي للعددين a و b .
- ٢ - ليكن d القاسم المشترك الاعظم للعددين الصحيحين a و b . برهن انه يوجد عدد لا نهائي من الاعداد الصحيحة h و k بحيث ان $d = ha + kb$.
- ٣ - لتكن S مجموعة مكونة من اعداد صحيحة بحيث تكون مغلقة بالنسبة للجمع . هل من الضروري ان تتكون S من كل المضاعفات العددية الصحيحة لعدد صحيح ثابت ؟
- ٤ - ليكن $n \geq 2$. برهن ان q ، m . a (n ، a) = n (q ، m . a (b ، a) .
- ٥ - برهن ان القاسم المشترك الاعظم لعددين صحيحين a و b مخالفين للصفر هو اكبر عدد صحيح يقسم كلا من a و b .
- ٦ * ليكن a ، $b \geq 2$ ، $d = q$ ، m . a (b ، a) . اثبت انه اذا كان $a = ha + kb$ و $b = ka + lb$ فام q ، m . a (h ، k) = ١

د. خوارزمية اقليدس

لقد برهننا ان لأي زوج من الاعداد الصحيحة قاسماً مشتركاً أعظم . ولم يعط البرهان اي اشارة الى طريقة ايجاد هذا القاسم او التعبيلاً عنه كتوفيق خطي للعددين الصحيحين المعطيين . لكن هناك طريقة ، على كل حال ، تعطي كلا القاسم القاسم المشترك الاعظم للعددين الصحيحين والتعبير عنه كتوفيق خطي . وتعرف هذه الطريقة بخوارزمية اقليدس .

ليكن a و b عددين صحيحين موجبين . (ستعالج حالة العددين السالبين في التمارين) . فطريقة خوارزمية اقليدس تقتضي قسمة متتالية كما يلي :

اقسم a على b لتحصل على باق اول r_1 . اقسم b على r_1 وليبق r_2

استمر بهذه الطريقة حتى يكون الباقي صفراً . فاذا كانت لا تقبل القسمة على ب

$$\begin{array}{ll}
 ١. \text{ أ. } ب \text{ ك } ١ + ١ ر & (٠ > ١ ر > ب) \\
 \text{ب} = ١ ر \text{ ك } ٢ + ٢ ر & (٠ > ٢ ر > ١ ر) \\
 ١ ر = ٢ ر \text{ ك } ٣ + ٣ ر & (٠ > ٣ ر > ٢ ر) \\
 ٢-٢ ر = ١-٢ ر \text{ ك } ٤ + ٤ ر & (٠ > ٣ ر > ٢-٢ ر) \\
 ١-٢ ر = ١-٢ ر \text{ ك } ٥ + ٥ ر & (٠ = ١-٢ ر)
 \end{array}$$

ويكون القاسم المشترك الاعظم للعددين أ و ب آخر باق غير الصفر ، اي العدد رن في متتالية القسمة الموجزة اعلاه . (لماذا يجب ان تنتهي العملية ؟) . وبرهان خوارزمية اقليدس يتبع التمهيدية ١١ .

١٠ مثال

جد ق. م. أ. للعددين ١٠٥ و ٢٨ .

باجراء القسمة المتتابة ، نحصل على

$$\begin{array}{l}
 ١٠٥ = ٢٨ \times ٣ + ٢١ \text{ (قسمة ١٠٥ على ٢٨)} \\
 ٢٨ = ٢١ \times ١ + ٧ \text{ (قسمة ٢٨ على ٢١)} \\
 ٢١ = ٧ \times ٣ + ٠ \text{ (قسمة ٢١ على ٧)} \\
 \text{وبذا يون ق. م. أ. للعددين ١٠٥ و ٢٨ هو ٧ .}
 \end{array}$$

لاحظ انه عند كل مرحلة حسابية في الخوارزمية يجب ان يقسم القاسم السابق على الباقي السابق . وخارج القسمة لا شأن لها بالامر .
وفي الخطوة الاولى لبرهان الخوارزمية نبرهن التمهيدية التالية :

١١ تمهيدية

ليكن أ ، ب ، ، فاذا كانت $ب \text{ ك } ١ + ر$ حيث $٠ < ر < ب$ ، فيكون القاسم المشترك الاعظم للعددين أ و ب هو نفس القاسم المشترك الاعظم للعددين ب و ر .
ق. م. أ. (أ ، ب) = ق. م. أ. (ب ، ر) .

البرهان

سنبين ان للزوج أ و ب نفس القواسم المشتركة للزوج ب و ر . افرض ان ع | ب و ع | ر فان

ب = ع م ، ر = ع ن حيث م و ن عددان صحيحان والنتيجة أن :

$$أ = ب ك + ر = ع م ك + ع ن = ع (م ك + ن)$$

وهكذا ع | أ . بالمثل ، اذا كانت ع | أ ، ع | ب ، فان ع | ر . وهكذا تكون المجموعة المكونة من قواسم مشتركة للعددين أ و ب هي نفسها المجموعة المكونة من القواسم المشتركة للعددين ب و ر . ويتبع فوراً ان للزوجين أ ، ب و ب ، ر نفس القاسم المشترك الاعظم .

نبرهن الان خوارزمية اقليدس (اي انه اذا كانت رن آخر باق صفري في المتتابعة المكونة من قواسم أ ، فان رن هو القاسم المشترك الاعظم للعددين أ و ب) .

البرهان

في المتتابعة المكونة من البواقي غير السالبة $r_1 < r_2 < r_3 \dots$ يجب ان يوجد باق رن+1 هو الصفر ، لانه يوجد فقط عدد منته من الاعداد الصحيحة م بحيث ان $0 < م < r_1$. ويبين تطبيق التمهيدية ١١ مرة بعد مرة أن :

$$\begin{aligned} ق م . أ . (ب ، أ) = ق م . أ . (ب ، ر_1) = ق م . أ . (ر_1 ، ر_2) \\ ق م . أ . (ر_1 ، ر_2) = ق م . أ . (ر_2 ، ر_3) = \dots = ر_n \end{aligned}$$

ويمكن ايضاً استعمال خوارزمية اقليدس للتعبير عن القاسم المشترك الاعظم للعددين أ و ب كتوفيق خطي من أ و ب . ولعمل ذلك ابدأ باعلى متتابعة عمليات القسمة وعبر بالدور عن كل باق كتوفيق خطي بين أ و ب . وهكذا نحصل على

$$\begin{aligned} r_1 &= أ - ك_1 ب \\ r_2 &= ب - ك_2 ر_1 = ب - ك_2 (أ - ك_1 ب) = (١ - ك_2 ك_1) أ + ك_2 ب \\ &= (- ك_2 ك_1 + ١) أ + ك_2 ب \\ r_3 &= ر_1 - ك_3 ر_2 = \dots \end{aligned}$$

وعلى سبيل المثال لنجد التوفيق الخطي للعددين ٢٨ و ١٠٥ الذي يمثل ق م . أ . للعددين ٢٨ و ١٠٥ . تعطينا القواسم ما يلي حسب المثال ١٠ :

$$\begin{aligned} ٢١ = ١٠٥ - ٢٨ (٣) \\ ٧ = ٢٨ - ٢١ (١) = (٢٨) - ١٠٥ (٣) \end{aligned}$$

فيكون

$$٧ = (٤) (٢٨) - (١) (١٠٥) .$$

تمارين

- ١ - استعمل خوارزمية اقليدس لايجاد القواسم المشتركة العظمى :

أ . ق.م.أ. (٣٧٤ ، ٥١)	ح . ق.م.أ. (٨٧٦٦ ، ٣٤٥)
ب . ق.م.أ. (٩٨٤٣ ، ٣٣٤)	د . ق.م.أ. (٤٦٧٣ ، ٨٩٣)
- ٢ - لكل من الأزواج في التمرين ١ استعمل خوارزمية اقليدس لتمثل القاسم المشترك الاعظم للعديدين أ و ب .
- ٣ - ليكن أ أو ب عدداً سالباً اثبت ان الخوارزمية الاقليدية ، عند تطبيقها على زوج ملائم من الاعداد الصحيحة ، يمكن استعمالها لايجاد القاسم المشترك الاعظم للعديدين أ و ب . اعط مثالا خاصاً لطريقتك .

هـ . النظرية الأساسية في الحساب

عند العمل بخوارزمية القسمة وخوارزمية اقليدس نلاحظ فوراً ان الاعداد الصحيحة الموجبة تبدو انها تقع في ثلاث مجموعات : العدد الصحيح ١ ، والاعداد الاولى ، والاعداد الصحيحة الموجبة التي تكون حاصل ضرب اعداد أولية ، قد تكون رغبت باستعمال العوامل الاولى للعديدين الصحيحين ، أ و ب لكي تجد القاسم المشترك الاعظم لهما والحقيقة ان كل عدد صحيح موجب غير (هو أولي أو حاصل ضرب (وحيد) لاعداد اولية ناتجة عن النظرية الاساسية في الحساب . نلاحظ في التمرين ٧ انه كنتيجة لهذه النظرية من الممكن استعمال عوامل اولية مشتركة للعديدين الصحيحين ، أ و ب ، لايجاد قاسمهما المشترك الاعظم . ونلاحظ ايضاً في التمرين ٨ كيف تستعمل كل العوامل الاولى للعديدين أ و ب لايجاد المضاعف المشترك الاصغر (اي اصغر عدد يقبل القسمة على أ و ب) نبرهن اولا نتيجتين مفيدتين بنفسيهما وايضاً في البرهان للنظرية الاساسية في الحساب .

١٢ نظرية

اذا كان د عدداً اولياً و ك | أ ب ، فان د | أ أو د | ب .

البرهان

ليكن د | أ ب ، حيث د عدداً اولياً ، وافرض ان د $\nmid$ أ . فان ق.م.أ. (د ، أ) = ١ لأن د عدد اولي ، ويوجد عددان صحيحان ح و ك حيث ان $١ = ح \cdot أ + ك \cdot د$.
واذن فان $١ = ب \times أ = ب \cdot ح + ب \cdot ك \cdot د$. وبما ان د | أ ب فيوجد عدد صحيح م بحيث

ان $a \mid b = d \cdot m$. فیتبع ان $b = d \cdot a + b - d \cdot a = d \cdot (m - a) + b$ وهكذا فان $d \mid b$.

١٣ نظرية

اذا كان d عدداً اولياً و $(a, m \dots n)$ ، فان $d \mid a$ او $d \mid m$ او $d \mid n$ ، و عدد ما ، $1 \leq n$.
ويترك برهان النظرية ١٣ للتمرين ١ .

١٤ نظرية

النظرية الاساسية في الحساب – الصيغة الاولى . اي عدد صحيح اكبر من ١ اما ان يكون اولياً او يمكن التعبير عنه كحاصل ضرب أعداد أولية . والتعبير عن اي عدد صحيح موجب غير اولي كحاصل ضرب اعداد اولية تعبير وحيد اذا تجاهلنا ترتيب العوامل .

البرهان

نبرهن العبارة الاولى للنظرية باستخدام الصيغة الثانية لبدأ الاستقراء . فلكل عدد صحيح $n \geq 2$

٢ لتكن فن القضية : n أولية أو يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب اعداد أولية .

فبما ان ٢ أولي ، تكون n صائبة . لعدد صحيح $r \leq 2$. فلنفترض ان العبارات n ، $n+1$ ، ... ، $n+r-1$ كلها صائبة . فيجب ان نبرهن ان العبارة $n+r$: $n+r$ تكون أولية او يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب اعداد أولية .

اذا كان $n+r$ عدداً اولياً ، فان $n+r$ تكون صائبة . واذا لم يكن $n+r$ اولياً ، فيوجد عدداً صحيحان u ، v بحيث ان $n+r = uv$ ، $u > 1$ و $v > 1$ و $n+r > 1$. وكنتيجة لفرضية الاستقراء تكون u و v صائبتين . ولهذا فتوجد اعداد أولية p_1 ، p_2 ، ... ، p_k و q_1 ، q_2 ، ... ، q_l بحيث ان

$$n+r = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} q_1^{b_1} q_2^{b_2} \dots q_l^{b_l}$$

$$n+r = 1 = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} q_1^{b_1} q_2^{b_2} \dots q_l^{b_l}$$

ومن ثم فان $n+r$ تكون صائبة . وهكذا باستخدام المبدأ الثاني للاستقراء تكون فن صائبة لكل عدد صحيح $n \geq 2$.

ولبرهنة وحدانية التحليل للعوامل الاولى لأي عدد صحيح $n \geq 2$ ، لتكن فن العبارة : n أولية او يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب اعداد اولية بطريقة واحدة : $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ ، $n \geq 2$.

العدد الصحيح ٢ أولي ، وبذا فان f_p صائبة . ليكن $r \leq 2$ عدداً صحيحاً وافرض ان f_p ، f_{p+1} ، ... ، f_{p+r} كلها صائبة . فيجب ان نبين ان f_{p+r+1} .

افذا كان $r + 1$ أولياً فإن r تكون صائبة . وإذا لم يكن $r + 1$ أولياً فيوجد عدداً أوليان أو أكثر $r_1, r_2, \dots, r_k$ بحيث أن

$$r = 1 + k_1 \leq \dots \leq k_r \leq r$$

افرض ان $r + 1$ له ايضاً العوامل الاولى التالية :

۱ + ۲ = ۳، ۳ + ۴ = ۷، ۷ + ۵ = ۱۲، ۱۲ + ۶ = ۱۸، ۱۸ + ۷ = ۲۵، ۲۵ + ۸ = ۳۳، ۳۳ + ۹ = ۴۲، ۴۲ + ۱۰ = ۵۲، ۵۲ + ۱۱ = ۶۳، ۶۳ + ۱۲ = ۷۵، ۷۵ + ۱۳ = ۸۸، ۸۸ + ۱۴ = ۱۰۲، ۱۰۲ + ۱۵ = ۱۱۷، ۱۱۷ + ۱۶ = ۱۳۳، ۱۳۳ + ۱۷ = ۱۵۰، ۱۵۰ + ۱۸ = ۱۶۸، ۱۶۸ + ۱۹ = ۱۸۷، ۱۸۷ + ۲۰ = ۲۰۷، ۲۰۷ + ۲۱ = ۲۲۸، ۲۲۸ + ۲۲ = ۲۵۰، ۲۵۰ + ۲۳ = ۲۷۳، ۲۷۳ + ۲۴ = ۲۹۷، ۲۹۷ + ۲۵ = ۳۲۲، ۳۲۲ + ۲۶ = ۳۴۸، ۳۴۸ + ۲۷ = ۳۷۵، ۳۷۵ + ۲۸ = ۴۰۳، ۴۰۳ + ۲۹ = ۴۳۲، ۴۳۲ + ۳۰ = ۴۶۲، ۴۶۲ + ۳۱ = ۴۹۳، ۴۹۳ + ۳۲ = ۵۲۵، ۵۲۵ + ۳۳ = ۵۵۸، ۵۵۸ + ۳۴ = ۵۹۲، ۵۹۲ + ۳۵ = ۶۲۷، ۶۲۷ + ۳۶ = ۶۶۳، ۶۶۳ + ۳۷ = ۷۰۰، ۷۰۰ + ۳۸ = ۷۳۸، ۷۳۸ + ۳۹ = ۷۷۷، ۷۷۷ + ۴۰ = ۸۱۷، ۸۱۷ + ۴۱ = ۸۵۸، ۸۵۸ + ۴۲ = ۹۰۰، ۹۰۰ + ۴۳ = ۹۴۳، ۹۴۳ + ۴۴ = ۹۸۷، ۹۸۷ + ۴۵ = ۱۰۳۲، ۱۰۳۲ + ۴۶ = ۱۰۷۸، ۱۰۷۸ + ۴۷ = ۱۱۲۵، ۱۱۲۵ + ۴۸ = ۱۱۷۳، ۱۱۷۳ + ۴۹ = ۱۲۲۲، ۱۲۲۲ + ۵۰ = ۱۲۷۲، ۱۲۷۲ + ۵۱ = ۱۳۲۳، ۱۳۲۳ + ۵۲ = ۱۳۷۵، ۱۳۷۵ + ۵۳ = ۱۴۲۸، ۱۴۲۸ + ۵۴ = ۱۴۸۲، ۱۴۸۲ + ۵۵ = ۱۵۳۷، ۱۵۳۷ + ۵۶ = ۱۵۹۳، ۱۵۹۳ + ۵۷ = ۱۶۵۰، ۱۶۵۰ + ۵۸ = ۱۷۰۸، ۱۷۰۸ + ۵۹ = ۱۷۶۷، ۱۷۶۷ + ۶۰ = ۱۸۲۷، ۱۸۲۷ + ۶۱ = ۱۸۸۸، ۱۸۸۸ + ۶۲ = ۱۹۵۰، ۱۹۵۰ + ۶۳ = ۲۰۱۳، ۲۰۱۳ + ۶۴ = ۲۰۷۷، ۲۰۷۷ + ۶۵ = ۲۱۴۲، ۲۱۴۲ + ۶۶ = ۲۲۰۸، ۲۲۰۸ + ۶۷ = ۲۲۷۵، ۲۲۷۵ + ۶۸ = ۲۳۴۳، ۲۳۴۳ + ۶۹ = ۲۴۱۲، ۲۴۱۲ + ۷۰ = ۲۴۸۲، ۲۴۸۲ + ۷۱ = ۲۵۵۳، ۲۵۵۳ + ۷۲ = ۲۶۲۵، ۲۶۲۵ + ۷۳ = ۲۶۹۸، ۲۶۹۸ + ۷۴ = ۲۷۷۲، ۲۷۷۲ + ۷۵ = ۲۸۴۷، ۲۸۴۷ + ۷۶ = ۲۹۲۳، ۲۹۲۳ + ۷۷ = ۳۰۰۰، ۳۰۰۰ + ۷۸ = ۳۰۷۸، ۳۰۷۸ + ۷۹ = ۳۱۵۷، ۳۱۵۷ + ۸۰ = ۳۲۳۷، ۳۲۳۷ + ۸۱ = ۳۳۱۸، ۳۳۱۸ + ۸۲ = ۳۳۹۹، ۳۳۹۹ + ۸۳ = ۳۴۸۲، ۳۴۸۲ + ۸۴ = ۳۵۶۶، ۳۵۶۶ + ۸۵ = ۳۶۵۱، ۳۶۵۱ + ۸۶ = ۳۷۳۷، ۳۷۳۷ + ۸۷ = ۳۸۲۴، ۳۸۲۴ + ۸۸ = ۳۹۱۲، ۳۹۱۲ + ۸۹ = ۴۰۰۱، ۴۰۰۱ + ۹۰ = ۴۰۹۱، ۴۰۹۱ + ۹۱ = ۴۱۸۲، ۴۱۸۲ + ۹۲ = ۴۲۷۴، ۴۲۷۴ + ۹۳ = ۴۳۶۷، ۴۳۶۷ + ۹۴ = ۴۴۶۱، ۴۴۶۱ + ۹۵ = ۴۵۵۶، ۴۵۵۶ + ۹۶ = ۴۶۵۲، ۴۶۵۲ + ۹۷ = ۴۷۴۹، ۴۷۴۹ + ۹۸ = ۴۸۴۷، ۴۸۴۷ + ۹۹ = ۴۹۴۶، ۴۹۴۶ + ۱۰۰ = ۵۰۴۶، ۵۰۴۶ + ۱۰۱ = ۵۱۴۷، ۵۱۴۷ + ۱۰۲ = ۵۲۴۹، ۵۲۴۹ + ۱۰۳ = ۵۳۵۲، ۵۳۵۲ + ۱۰۴ = ۵۴۵۶، ۵۴۵۶ + ۱۰۵ = ۵۵۶۱، ۵۵۶۱ + ۱۰۶ = ۵۶۶۷، ۵۶۶۷ + ۱۰۷ = ۵۷۷۴، ۵۷۷۴ + ۱۰۸ = ۵۸۸۲، ۵۸۸۲ + ۱۰۹ = ۵۹۹۱، ۵۹۹۱ + ۱۱۰ = ۶۱۰۱، ۶۱۰۱ + ۱۱۱ = ۶۲۱۲، ۶۲۱۲ + ۱۱۲ = ۶۳۲۴، ۶۳۲۴ + ۱۱۳ = ۶۴۳۷، ۶۴۳۷ + ۱۱۴ = ۶۵۵۱، ۶۵۵۱ + ۱۱۵ = ۶۶۶۶، ۶۶۶۶ + ۱۱۶ = ۶۷۸۲، ۶۷۸۲ + ۱۱۷ = ۶۸۹۹، ۶۸۹۹ + ۱۱۸ = ۷۰۱۷، ۷۰۱۷ + ۱۱۹ = ۷۱۳۶، ۷۱۳۶ + ۱۲۰ = ۷۲۵۶، ۷۲۵۶ + ۱۲۱ = ۷۳۷۷، ۷۳۷۷ + ۱۲۲ = ۷۴۹۹، ۷۴۹۹ + ۱۲۳ = ۷۶۲۲، ۷۶۲۲ + ۱۲۴ = ۷۷۴۶، ۷۷۴۶ + ۱۲۵ = ۷۸۷۱، ۷۸۷۱ + ۱۲۶ = ۷۹۹۷، ۷۹۹۷ + ۱۲۷ = ۸۱۲۴، ۸۱۲۴ + ۱۲۸ = ۸۲۵۲، ۸۲۵۲ + ۱۲۹ = ۸۳۸۱، ۸۳۸۱ + ۱۳۰ = ۸۵۱۱، ۸۵۱۱ + ۱۳۱ = ۸۶۴۲، ۸۶۴۲ + ۱۳۲ = ۸۷۷۴، ۸۷۷۴ + ۱۳۳ = ۸۹۰۷، ۸۹۰۷ + ۱۳۴ = ۹۰۴۱، ۹۰۴۱ + ۱۳۵ = ۹۱۷۶، ۹۱۷۶ + ۱۳۶ = ۹۳۱۲، ۹۳۱۲ + ۱۳۷ = ۹۴۴۹، ۹۴۴۹ + ۱۳۸ = ۹۵۸۷، ۹۵۸۷ + ۱۳۹ = ۹۷۲۶، ۹۷۲۶ + ۱۴۰ = ۹۸۶۶، ۹۸۶۶ + ۱۴۱ = ۱۰۰۰۷، ۱۰۰۰۷ + ۱۴۲ = ۱۰۱۴۹، ۱۰۱۴۹ + ۱۴۳ = ۱۰۲۹۲، ۱۰۲۹۲ + ۱۴۴ = ۱۰۴۳۷، ۱۰۴۳۷ + ۱۴۵ = ۱۰۵۸۲، ۱۰۵۸۲ + ۱۴۶ = ۱۰۷۲۸، ۱۰۷۲۸ + ۱۴۷ = ۱۰۸۷۵، ۱۰۸۷۵ + ۱۴۸ = ۱۱۰۲۴، ۱۱۰۲۴ + ۱۴۹ = ۱۱۱۷۴، ۱۱۱۷۴ + ۱۵۰ = ۱۱۳۲۵، ۱۱۳۲۵ + ۱۵۱ = ۱۱۴۷۷، ۱۱۴۷۷ + ۱۵۲ = ۱۱۶۳۰، ۱۱۶۳۰ + ۱۵۳ = ۱۱۷۸۲، ۱۱۷۸۲ + ۱۵۴ = ۱۱۹۳۵، ۱۱۹۳۵ + ۱۵۵ = ۱۲۰۸۹، ۱۲۰۸۹ + ۱۵۶ = ۱۲۲۴۶، ۱۲۲۴۶ + ۱۵۷ = ۱۲۴۰۳، ۱۲۴۰۳ + ۱۵۸ = ۱۲۵۶۱، ۱۲۵۶۱ + ۱۵۹ = ۱۲۷۲۰، ۱۲۷۲۰ + ۱۶۰ = ۱۲۸۸۰، ۱۲۸۸۰ + ۱۶۱ = ۱۳۰

فدون فقدان التعميم يمكننا ان نفرض ان $k_1 \geq s_1$ فانه ، بما ان $k_1 \leq r + 1$ ، $k_1 \mid (s_1)$
 $s_1 \dots s_r$ (سطر) ومن ثم ، باستخدام النظرية ١٣ ، $k_1 \mid s_1 \dots s_r$ ، $1 \leq r \leq p$.
 ولكن يكون $s_1 \dots s_r$ ايضاً اولياً ، وبذا فان $k_1 = s_1 \dots s_r$. وهكذا كنتيجة للترتيب

$s_1 \geq s_2 \geq s_3$ يجب ان تحصل أيضاً على $s_1 = s_2$

فلیکن م = ک ک ۳ ... دی = س س ۴ س ۳ ... س ۲

فيكون $2 \leq m < r + 1$ ومن ثم فتكون m صائبة حسب فرضية الاستقراء . ويقتضي هذا ان تكون m أولية ، وفي هذه الحالة $y = p = 2$ و $k_1 = s_1$ ، $k_2 = s_2$ أو تحليل العدد m للعوامل يكون وحيداً . ومن ثم ففي الحالة الثانية يجب ان نحصل ايضاً على $y = p$ و $k_r = s_r$ والكل و $1, 2, \dots, y$.

١٥ نظرية

النظرية الأساسية في الحساب - الصيغة العامة . أي عدد صحيح مختلف عن ٠ ، ١ ، أو - ١ يكون أولياً أو يمكن التعبير عنه كحاصل ضرب أعداد أولية (أو عدد أولي) مضروبة في ١ . ويكون التعبير عن أي عدد غير أولي كحاصل ضرب أعداد أولية بطريقة وحيدة إلا بالنسبة لترتيب العوامل . ويترك البرهان النظرية ١٥ للتمرين ٢ .

وكتبراً ما يكون مفيداً كتابة التحليل الاولي للاعداد الصحيحة في الصيغة

± ۛۛۛ ۛۛۛ ۛۛۛ ... ۛۛۛ .

حيث $k_1, k_2, \dots, k_r$ تكون اولىة، $k_1 > k_2 > \dots > k_r$ و $n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{Z}^+$.

تمارین

- ١ - برهن النظرية ١٣
٢ - برهن النظرية ١٥

٣ - باستخدام الرموز التالية للنظرية ١٥ ، اكتب التحليل الأولي لعوامل الأعداد الصحيحة ٥٦٠ ، ٦٩٣ ، ٩٥٠ ، و ١٢٧٨ .

٤* - برهن أنه إذا كان r و d عددين صحيحين أوليين نسبياً (أي يكون q م. أ. (r, d) = ١) ، فإن $r | n$ ، $d | n$.

٥ - أ. إذا كانت $r | n$ و $d | n$ ، فهل من الضروري أن يتبع أن $rd | n$ ؟
عط أمثلة .

ب. اكمل العبارة التالية وبرهنها : لتكن r, d, n أعداداً صحيحة مخالفة للصفر . فإذا كانت $r | n$ ، $d | n$ ، و _____ ، فإن $rd | n$.

٦ - أ. لتكن $d_1, d_2, \dots, d_r$ أعداداً أولية . برهن بالتناقض أن أيّاً من هذه الأعداد يكون عاملاً للعدد الصحيح ($d_1 d_2 \dots d_r$) + ١

ب. باستخدام نتيجة الجزء أ ، برهن أنه يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الأولية (لقد قدمنا أقليدس هذه المقولة) .

٧ - اذكر طريقة لاستعمال النظرية الأساسية في الحساب لإيجاد القاسم المشترك الأعظم لعددين صحيحين . وضح ببعض الأمثلة .

٨ - تعريف يكون العدد الصحيح m المضاعف المشترك الأصغر للعددين الصحيحين a و b إذا وفقط إذا كان (١) كل من a و b يقسم m ، (٢) يقسم m أي عدد صحيح آخر يكون مضاعفاً لكل من a ، b . نرمز للمضاعف المشترك الأصغر m للعددين a و b بالرمز $m = a \cdot b$.
أ. (a, b) . وبالرموز نكتب $m = a \cdot b$. أ. (a, b) إذا وفقط إذا كان (١) $a | m$ ، $b | m$ و (٢) إذا كان $a | m$ و $b | m$ ، فإن $m | m$.

١. جد المضاعف المشترك الأصغر لكل مما يلي :

م. م. أ. (٢٤ ، ٢٠) م. م. أ. (- ٢٠ ، - ٢٩)

م. م. أ. (- ٣٠ ، - ٣٦) م. م. أ. (١٥ ، ٣٤)

م. م. أ. (- ٦٠ ، ٩٠)

ب. برهن أنه لأي عددين صحيحين موجبين مضاعف مشترك أصغر .

ج. هل يكون المضاعف المشترك الأصغر للعددين الصحيحين الموجبين a و b وحيداً ؟ علل إجابتك .

د. ليكن a و b عددين صحيحين وضع $d = \text{ق.م.أ.} (a, b)$.

اثبت أنه إذا كانت $a = d \cdot m$ و $b = d \cdot n$ فإن $q = \text{ق.م.أ.} (m, n) = ١$ والمضاعف

- المشترك الاصغر للعددين a و b هو العدد الصحيح d . م. ن.
- هـ. ليكن a و b عددين صحيحين . فبرهن ان q . م. a . (a , b) م. م. a . (a , b) = a ب
- و. اذكر طريقة لاستخدام النظرية الاساسية في الحساب لايجاد المضاعف المشترك الاصغر لعددين صحيحين موجبين . وضع ببعض الامثلة .

ملاحظات مساعدة لحل المسائل

بند ۱، ۲ ۱۸ ب وضع الجداء

(س و) (ب م)
(ع ص) (د ح)

مساوياً لمصفوفة العنصر المحايد وحل بعض المعادلات الخطية للأعداد و
س و ص و ع .

بند ۱،۳ ۲۵ - فرض انه يوجد عنصرين محايدين و و μ وبرهن انهما يجب ان يكونا متساويان .

٢٥ ز اعرض اولاً حلاً وبرهن انه الحل الوحيد .

بند ۱، ۴ ۴۶ اثبت ان $[K \circ (H \circ Q) (S)] = [(K \circ H) \circ Q] (S)$ لكل $S \in \mathcal{S}$.

بند ۱,۵ ۵۹ لتعین النظر لتبديلة قر ۳S بسرعة ، لاحظ ان قر ۱' (ص) = س اذا وفقط اذا قر (س) = ص . فمثلا ، اذا كانت قر (۱) = ۳ ، فان قر ۱' (۳) =

٦١ ليكن $n \leq 3$ عدد صحيح ثابت . اختر تبديلتين لا تتبادلان في S_3 بين كيف توسع هذه الى تبديلتين لا تتبادلان في S_n .

بند ١,٦ ٦٣ يمكن لرأس معطى ان ينتقل الى ——— مواضع محتملة . وبتثبيت هذا الرأس في احدى هذه المواضع ، كم من التماثلات تحصل ؟

بند ۱، ۸۳ يجب ان تبرهن ان $(\bar{p} + \bar{b})_n = (p + b)_n$

لعمل ذلك ترجم التمهيدية الى عبارات تشمل تطابقات

(مثلاً أن = أن لهذا أ (مضن))

استعمل نتائج سابقة على التطابقات .

بند ۲,۱ ۱۲ تؤكد الفرضية انه لكل ϵ ، $\exists \delta$ نحصل على $\epsilon \leq \delta$ و ينتج لنا هذا الفرض عمل اختبارات معينة للعنصرين ϵ ، δ .

برهن (١) و (٢) اذا كانت $B \subseteq A$ فان $B \cap A = B$ و (٣) تكون $B \cap A$ مغلقة بالنسبة الى H .

بند ۲، ۳ ۳۱ - اثبت ان ${}^p\mathcal{V} \supseteq {}^o\mathcal{V}$ و بالعکس

٣١ ر خذ $\exists \alpha \in \beta$ ب $\alpha \in \beta$.
٣٥ لاحظ مسألة ٢٤

بند ٢,٤ ٤٩ استعمل العبارة ان $\emptyset$ تكون واحد لواحد اذا وفقط اذا كان α ، ب $\exists \alpha \in \beta$ ، $\emptyset$
(α) = $\emptyset$ (ب) يتضمن ان $\alpha = \beta$. افرض اولا ان $\emptyset$ تكون واحد لواحد .
لبرهنة ان نو ($\emptyset$) = { $\emptyset$ } خذ $\exists \alpha \in \beta$ نو ($\emptyset$) واثبت ان $\alpha = \emptyset$.

لبرهنة العكس للعبارة افرض ان نو ($\emptyset$) = { $\emptyset$ } وبرهن ان نو $\emptyset$ تكون
واحد لواحد . اثبت اولا ان $\emptyset$ ($\alpha \in \beta$) = $\emptyset$ اذا كانت $\emptyset$ (α) = $\emptyset$ (ب)
اكتب قائمة اولا بالعناصر المختلفة في β .

بند ٢,٦ ٧١

تعريف الزمرة الجزئية الطبيعية مكافئاً للعبارة

بند ٢,٧ ٧٩

$\alpha \in \beta = \alpha \in \beta$ و $\alpha \in \beta = \alpha \in \beta$ لكل $\alpha \in \beta$.

٨١ استعمل نظرية ٨٠ ب .

٨٢ لاحظ اولا بعض المجموعات المرافقة في مسألة ٧٧ افرض ان $\alpha \in \beta$.

٨٤ جد دليل $\alpha \in \beta$. استخدم هذا الدليل وربما نتيجة المسألة ٨٣ لوصف
المجموعات المرافقة في α .

بند ٢,٨ ٨٩ اثبت انه اذا كان $\alpha \in \beta$ فان $\alpha \in \beta$ ، $\alpha \in \beta = \alpha \in \beta$ و $\alpha \in \beta$.

لبعض $\alpha \in \beta$. استعمل طبيعة $\alpha \in \beta$ والمساواة

$\alpha \in \beta = \alpha \in \beta$ لتحصل على $\alpha \in \beta$ ، $\alpha \in \beta = \alpha \in \beta$.

٩٤ > لايجاد نو ($\emptyset$) تذكر ان عنصر الوحدة في β / α يكون المجموعة المرافقة

بند ٣,٢ ٢٧ اعتبر الجمع (α) + (β) واستعمل الخاصية ب في عرضية ٦ .

بند ٣,٦ ٤٣ لاثبات التضمين $\alpha \subseteq \beta$ لتكن العبارة α معطاه وبرهن العبارة ب. بما ان
العبارة ب هي نفسها عبارة شرطية اعتبر الفرضية للعبارة ب وبرهن نتيجتها

٥١ برهن التضمينات اذا لم تكن ن — فلا تكون Z حلقة كاملة .

اذا كانت ن — فان Z تكون حلقة كاملة .

بند ٣,٧ ٦٣ لاحظ نظرية ٣٥ في فصل ٢ .

٦٤ ب اثبت ان (α) و (β) = ($\alpha \cup \beta$) .

بند ٤,٢ ٢٥ اذا كانت $\theta = (\alpha , \beta)$ ما هو العامل في θ الذي يقابل العامل α في θ ؟

س في θ ؟ اذا كانت $\alpha \in \beta$ فان كلا من $\alpha \in \beta$ - $\alpha \in \beta$ و $\alpha \in \beta$

- س_۱ تظهر كعوامل للحدودية ق_۱(ن) ما هي العوامل المقابلة لهذه الحدودية ق_۱(ن) ؟
- اعتبر ازواج اخرى من العوامل في ق_۱(ن) و ق_۲(ن) للحالتين .
- ی > د > ت و ی > ت > د .
- استخدم النظرية ۲۶ أو نظرية ۲۸ . ۲۹
- حل المعادلة $\alpha = \beta = 0$ حيث $0 \in S$ واثبت ان $0 \in A$ ۳۰
- تذكر ان الاقتران المحافظ الذاتي للزمرة S هو اقتران محافظ من S الى S بحيث يكون واحداً لواحد وشاملاً . كل هذه الشروط يجب ان تؤخذ في الحسبان في برهانك .
- بند ۴،۳ ۴۱
- لاحظ انه اذا كانت (س ، ص) $\in$ S ، فتزید S (س ، ص) ان تكون عنصراً في S .
- بند ۴،۴ ۱۵۸
- استعمل تمهيدية ۷۹ في فصل ۲ لتبديل عناصر التركيب (س ۵ ص ۵) ۵ (س ۱ ص ۱) .
- بند ۴،۵ ۶۰
- استعمل نظرية ۸۰ ب في فصل ۲ لاثبات ان S ۵ ص ۵ طبيعية .
- اثبت ان S ۵ ص ۵ S ۵ ص ۵ S ۵ ص ۵ .
- لا حد الاتجاهات افرض ان S جداء مباشر داخلي للزمريتين الجزئيتين الطبيعيتين S و E . عرف اقتران من S $\times$ E الى S ۵ E و برهن انه تشاكل . كن طليقاً لاستخدام نظريتي ۶۴ و ۵۶ .
- بند ۵،۱ ۹
- استخدم نظرية ۶ عدة مرات .
- اختر حدوديتين خاصتين ق_۱(س) و ه_۱(س) لاثبات ان ۲ في هذه المثالية
- قد ترغب ان تشير لبعض المثاليات في نظرية ۷ من ملحق ۶ . اعمل اولاً البرهان اذا كانت S = { ۰ } أو S = L . وافرض ان S $\neq$ { ۰ } و S $\neq$ L . اختر حدودية غير صفرية د (س) ذات اقل رتبة في S . (لماذا يمكن عمل هذا ؟)
- اثبت ان در (د (س)) $\leq$ ۱ . لعمل ذلك افرض ان در (د (س)) = ۰ . وهذا يتضمن ان $0 \in S$ (لماذا ؟) خذ ق_۱(س) $\in$ S . نرغب في برهان ان ق_۱(س) = د (س) ه_۱(س) ، ه_۱(س) $\in$ S لـ [س] فاذا فرضنا ان هذا غير ممكن فان ق_۱(س) = د (س) ك (س) + ر (س) ، ك (س) ، ر (س) $\in$ [س] حيث در (ر (س)) > در (د (س)) ولكن ر (س) $\neq$ ۰ . هل ر (س) في S ؟ ما هي در (ر (س)) ؟

بند ٥,٢ ١٨ افترض ان الضرب معرف . لاثبات ان $\mathbb{Z}$ مثالية ، خذ $r \in \mathbb{Z}$ و $s \in \mathbb{Z}$.
فان $r + s = s + r$ و $s \cdot r = r \cdot s$ ، وبذلك (s, r) =

بند ٥,٣ ٢٦ اختر اولاً بعض القيم الصغيرة للعديدين $a, b \in \mathbb{Z}$.
وافحص التضمين التالي : اذا كان a ، $b \in \mathbb{Z}$ فان $a \mid b$ أو $b \mid a$.
قد يساعدك استعمال رمز القسمة من ملحق ٦ أو نظرية ١٢ في ملحق ٦ .
٣٠ ب استخدم نظرية ٢٣ .

بند ٥,٤ ٣٥ اثبت $s \neq t$. وافترض ان e مثالية تحقق $s \mid e \mid t$.
استعمل تمهيدية ٣٤ .

بند ١,٢ ٤ لاثبات ان الضرب عملية ثنائية على $\mathbb{Z}$ فيجب ان تبرهن انه اذا كانت a, b ،
 $c, d \in \mathbb{Z}$ ، فان $a \mid b$ و $c \mid d$. لعمل ذلك برهن انه اذا كانت $a \mid b$ و $c \mid d$ ،
 $s \neq 0$ فان $s \mid a$ و $t \neq 0$ لاثبات ان عنصر المصفوفة المحايدة يكون في $\mathbb{Z}$ ،
فيجب اولاً ان تعرفها وتثبت انها تكون غير منفردة وتبرهن بعد ذلك انها
عنصر محايد . وتكون عملية مماثلة لضرورية للنظائر .

بند ١,٣ ٦ استخدم تمرين ٥ .

بند ١,٦ ١٥ لوصف العناصر في D_n ، ابدأ بعمل مخططات لكثيرات الاضلاع في D_3 و D_4 .
وكثيرات اضلاع في D_5 و D_6 .

٥- لاطهار ان التركيب (٥) يكون عملية ثنائية على D_n ، فربما يساعد
استخدام مناظرة عدية مشابهة لتلك الموجودة في مسألة ٦٣ .

٥ د ثبت ان وصف صراحة عنصرين من D_n لا يتبادلان مع بعضهما البعض .

بند ١,٧ ٣ د لاحظ نظرية ١٢ في ملحق ٦ .

٤ افترض انه يوجد $s \in \mathbb{Z}$ ان بحيث ان $0 < s < r$.

لاحظ ان $0 < r - s < r$ (لماذا ؟) وان

$a = n \cdot k, s + k \in \mathbb{Z}$ (لماذا ؟)

بند ١,٨ ٢٢ جرب عدة قيم للعدد r .

٤ د لاحظ اولاً ان $q, m, p, (h, k) = 1$. استخدم تمرين ٤ في الملحق ٦ هـ

بند ٢,١ ١١ استخدم نظرية ٧ في الملحق ٦ .

١٥ ب لاحظ تمرين ٨ في ملحق ٦ هـ .

١٨ ح لاحظ نظرية ٨ في ملحق ٦ .

- بند ٢,٢ ٣ قد يكون العددين m و n سالبين . برهن العرضية اولا لقيمة $n = -1$ ، m Z . ثم اعتبر الحالة التي تكون فيها $n < 0$ و $m \geq 0$ و Z وبرهن العرضية بالاستقراء على متغير واحد مع تثبيت المتغير الاخر .
- ٤ هل من الممكن ان تكون جميع العناصر $1, 2, \dots, 2p$ ، ... مختلفة ؟
- اثبت انه يوجد عددين صحيحين a و b بحيث ان $a^2 = 1$ و $a \geq 1$ و $b > 0$ برهن ان a و b واخيراً برهن ان $a \geq 1$ و $b > 0$.

١١ ا اذا كان q, m, n . $f(m, n) = 1$ ، فيوجد عددين صحيحين a و b بحيث ان

$$1 = a^2 + b^2 \text{ م . اعتبر } b_1 = b^2 \text{ و } b_2 = b^2 .$$

١١ ح اعمل هذا البرهان بالاستقراء على r ، عدد الاعداد الاولية .

١٢ ب لاحظ تمرين ٧

١٣ ا برهن ان $b^2 = 0$ و وانه اذا كانت r هي رتبة b ، فان $r \mid n$ وبذلك $\frac{n}{r}$ حيث $s \geq 0$ ولايجاد s فيمكن ان ترغب اعتبار عدة قيم من n و s وتفتش على نموذج .

١٣ ب استعمل النتيجة في جزء ١ .

- بند ٢,٣ ٨ استعمل نظرية ٣٥ لتبين انه اذا كانت $(a, b) = 1$ ، و ، فان رتبة b تقسم كلا من m و n . اعمل ذلك باخذ الزمرتين $a \leq 1$ و $b \leq 1$ ذات الرتبتين _____ و _____ على الترتيب .

١١٣ ا لاحظ تمرين ١,٣ - ٦ .

١٤ ه افرض ان A لها زمرة جزئية S رتبته ستة . استعمل تمرين ١٣ لتعيين اي العناصر في A يجب ان يكون في الزمرة الجزئية المفروضة .

- بند ٢,٤ ٨ ب لاجد الاتجاهين افرض $r \mid n$ فان $n = rk + 1$ لاجد الاعداد $k \geq 0$ و $d > 0$. اعتبر $\phi(n)$ و $\phi(n)$ مستخدماً تعريف ϕ . وللاتجاه الاخر افرض ان $r \mid n$ و $a^n = b^n$. فان $n \mid (a - b)$ و $r \mid (a - b)$. (لماذا ؟) ثم اثبت ان $\phi(a^n) = \phi(b^n)$.

بند ٢,٥ ٦ افرض ان ϕ تشاكل من Z الى Q . ملاحظة كيف « تعمل » ϕ خذ $\phi(1) = k \geq 0$ فان $\phi(n) = kn$ حيث $n \in Z$.

بند ٢,٦ ٣ لتكن ϕ زمرة جزئية ، $a \geq 0$ مولداً للزمرة S ، و s اصغر عدد صحيح بحيث ان $a^s \geq 0$. خذ $a^s \geq 0$. بما ان $r \geq 0$ ، $r = s + k$ حيث

. $\geq z > s$. اثبت ان $z \in \mathbb{Q}$.

بند ٢,٧ ٢ استخدم نظرية ٨٤ لايجاد بعض الزمر الجزئية الطبيعية وبعدها استعمل عرضية ٨٢ لأجد واحدة اخرى على الاقل .

۱۲. بضع س ۳ ص ۳ و ۳ س ۳ . اثبت ان h^2 س ۳ ص ۳ .

۱۴ برهن ان ص ۵ ع ۵ ص ۵ ع = و .

١٦٢ استعمل تمهيدية ٧٩ لاثبات ان (ص ٥ ع) ٥ (ص ١ ع ١) عنصر في

صه ه ع اذا كان ص ، ص ، صه و ع ، ع ، ع ع .

بند ۲,۸ ۵ افحص تبادلياً في سه / صه .

۸. افرض ان $(P \supset Q)$ — $(P \supset R)$ صحیح ہو

يعرف عملية ثنائية تعريفاً حسناً. اختر $\sup$ و $\inf$ و $\max$ و $\min$ و أثبت ان $\sup$ و $\inf$ و $\max$ و $\min$ هي عمليات ثنائية تعريفاً حسناً.

ص ٥٩ و ص ٥٨ . لعمل ذلك اعتبر الزوجين (ص ٥٨ ، ص ٥٩) و (و) و

٥ ص، ٥ ص) .

٩ ب لاحظ النظريتين ٧١ و ٧٢ وتمرين ٤ أعلاه .

١١ برهن النظرية مستخدماً مبدأ الاستقراء الثاني . لتكن فن العبارة : لكل زمرة

تبدیلیه s رتبهها n ، اذا كان d عدد اولي يقسم n ، فيوجد $a^d \in s$ - $\{a\}$

بحيث ان $\mathcal{P} = \emptyset$ و . لبرهنة العبارة عندما تكون رتبة s ، $n + 1$ ، افرض

انها تكون صائبة لكل زمرة رتبته $r \geq n$. اعتبر اولا الحالة التي تكون فيها

سـ زمرة دورية (اي سـ = $\langle p \rangle$ لـاحد العناصر $p \in S$) واعتبر الحالة

لزمرة غير دورية واختر زمرة فعلية ص. (لماذا تكون ص موجودة ؟) اثبت

انه اذا كانت d لا تقسم رتبة v ، فان d تقسم رتبة s / ص .

استخدم تمرين ١٠ .

بند ٣,١ ٣ استخدم مخططات ثن والخصائص المؤلفه للتقاطع والاتحاد .

من الممكن ان يكون a ب نفس العنصر في S لكل $a \in S$.

٦ هـ لا ثبات ان ج تبديلية اذا كانت ف (س ، ح) تبديلية فعليك ان تثبت انه

لکل $\mathcal{A}$ ، $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ حاصل علی $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. جد اقتراین $\mathcal{C}$ ، $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}$ بحیث

ان قه (س.) = P وه (س) = B لاجد العناصر س. $\Rightarrow$ سه .

٦ و لا ثبات ان قد (سه ، ج) لها عنصر محايد للضرب ، فعليك ان تعرف اقتران

ع: سه ← ج. لا ثبات انه اذا كانت قه (سه ، ج) لها عنصر محايد

للضرب ع ، فان ج لها عنصر محايد للضرب ، فيجب ان تجد اولا مرشحاً

للعنصر المحايد وان تبهرن بعد ذلك انها تتحقق . انظر الملاحظة المساعدة

لتمرين ٦ هـ

- بند ٣,٤ ٥ لاحظ تمرين ١,٤ - ٥ ب .
 ٦ استخدم تمرين ٣,٣ - ٩ .
 بند ٣,٧ ٦ ب حل ٢٢ - ٨٢ الى قوى ذات اعداد اولية مختلفة . استخدم النظرية ٦٤
 لاثبات ان احدى هذه الاعداد الاولى تقسم $س^٦ - ١$.
 ١١ ب افرض $ن = در (ر (س))$ و $م = در (د (س))$ حيث $ن \leq م$.

$$\text{ضع } ر (س) = \sum_{i=1}^N ر_i س^i \text{ و } د (س) = \sum_{i=1}^{\infty} د_i س^i ,$$

اعتبر الحدودية

$$ر (س) = (س) - (ر ن ب_١ س^{-١} - س^{-٢} د (س))$$

اثبت ان $ر (س) \in ص$.

استعمل نظرية ٨ في ملحق ٦ . ١٢

- بند ٣,٨ ٥٠ اذا كانت $ب \neq ٠$ في $ك$ ، فان $ب^{-١}$ تكون موجودة في $ق$ (ولكن ليس من الضروري في $ك$) . ضع $ق = \{١ : ب^{-١} , ب \in ك , ب \neq ٠\}$ فان $ق \equiv ق$.

بند ٤,١ ١٠ ضع $ق = (١, ١, \dots, ١, ١)$. احسب

$$ق^٢ (١, ١) , ق^٢ (١, ١) \text{ وهكذا}$$

لاحظ اولا امثلة . ١٤

- بند ٤,٢ ١٣ الزمرة A تحتوي على — عناصر . هل الدورات $(١ ب ح)$ في S عناصر في A ؟

- بند ٤,٣ ٥ اذا كانت $ح$ اقتران محافظ ذاتي في Z و $ح(١) = ر$ ، فان $ح(ن) =$ — حيث $ن \in Z$. جد القيم الممكنة للاعداد $ر$:

استعمل طريقة سؤال ٥ ٦

- ١١ عرف اقتران شامل من $س$ الى $ع$ بحيث ان تقترن ١ بالعنصر $ح$ لكل $١ \in س$

- بند ٤,٥ ١١ لاثبات وحدانية التمثيل اعتبر $١ + ١ + \dots + ١ = ب_١ + ب_٢ + \dots + ب_م$ حيث $١ \in ب_i$ ، $ب_i \in ص$. ما هي رتبة العنصرين .
 $١ - ب_١$ و $(ب_٢ - ١) + \dots + (ب_م - ١)$ ؟
 (لاحظ تمرين ٢,٣ - ٠٨)

۹۷ بند ۵,۱

افرض ان $\sum_{i=1}^n = (س) ۱$ و $س و ه (س) = \sum_{i=1}^r بي سي عنصرين في ح$
 $[س]$ بحيث ان $ق (ر) = ه (ر)$ لكل $ر و ج$. اثبت ان $ق (ر) - ۱ = ۰$.
 $ه (ر) - ب$ لكل $ر و ج$.
 وبعد ذلك ان

$$1 - \sum_{i=1}^m p_i = 1 - \sum_{j=1}^n p_j$$

لكل $r \ni \varepsilon - \{ \cdot \}$. استعمل النظرية ٩ .

لتكن قـ (س) ، هـ (س) ثابتتين . ضع

$$\{ \text{قر (س) ی (س)} + \text{هـ (س) ك (س) : ی (س) ، ك (س) } \supset \text{له} \\ \{ [س] \}$$

برهن ان φ تكون مثالية في $L[S]$. واستخدم نظرية ١٥ .

۱۱ ما هو القاسم المشترك الاعظم للعنصرين y (س) و q (س) اذا كانت y

(س) لا تقسم قـ (س) ؟ استعمل تمرین ۹ .

برهن النظرية اولا للزمرة الجزئية

$$\text{صہر} = \{ \text{س} : \text{س} \rightarrow \text{سہ} , \text{رتبہ س احدی قوی د} \}$$

حيث د عدد اولي يقسم رتبة s . (لاحظ تمرين ٢٢ - ١٢ للتعريف بهذه

الزمرة وامتثلة). يمكنك البدء باختيار a بحيث يكون للعنصر a رتبة

قصوى . وبعدها ضع مولد محتمل للزمرة س مستخدماً مولدات الزمر الجزئية

ص واستعمل التمرينين ٢,٢ - ١١ و ٢,٣ - ٨ ومناظرة عدية لاكمال

البرهان .

بند ۵, ۵ لاحظ تمرین ۳, ۳ - ۹

٢٩ استخدم نظرية ٢٣ . لاحظ-تقرين ٥,١ - ١٢

بند ۵، ۲ ب برهن بالاستقراء على الدرجة للحدودية هـ (س) ان هـ (س) لها عامل غير

قابل للاختزال .

بند ۵, ۵ لاحظ تمرین ۵, ۲ - ۹ .

٧ ح استخدم نظرية ٢٣

٧ د لاحظ تمرين ٥,٣ - ٢ أو تمرين ٥,١ - ١١

٨ . لتكن ع مثالية بحيث ان

(ك (س)) $\supseteq$ ع $\supseteq$ لـ [س] استعمل نظرية ١٥ .

- ملحق ٥ ب ٧ لاحظ اولاً الحالات $n = 1, 2, 3, 4$
 فاذا كانت المجموعة النونية $\{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$
 طور عملية مماثلة لايجاد جميع المجموعات الجزئية من
 $[s_1, s_2, \dots, s_n]$
 باستخدام المجموعات الجزئية من $[s_1, s_2, \dots, s_n]$
 ملحق ٥ ح ٤ لكل عدد صحيح $n \leq 1$ لتكن Q_n العبارة $F_n + 1 - n$
 اثبت ان العبارات Q_n ، $n \in \mathbb{Z}^+$ تحقق كلا الجزئين من الفرض لمبدأ
 الاستقراء الاول .
 ملحق ٦ ب ١ لاحظ اولاً بعض الامثلة .
 ملحق ٦ ح ٤ ابدأ بالعدد $k = ق. م. ا. (٢, ب)$.
 ملحق ٦ و ٦ ب اعمل برهاناً بالتناقض .
 ب ٨ استخدم النظرية الاساسية في الحساب .

جدول بالمصطلحات والمفردات الرياضية وترجمتها

A

Abelian group

زمرة تبديلية (ابيلية)

Alternating group

زمرة متناوبة

Associative Law

قانون التجميع

Associative operation

عملية تجميعية

Automorphism

اقتران محافظ ذاتي

Axiom

اولية ، مسلمة

B

Binary operation

عملية ثنائية

C

Cancellation

اختزال

Canonical homomorphism

اقتران محافظ قانوني

Cartesian Product

الضرب الديكارتي ، الجداء الديكارتي

Center of a group

مركز زمرة

Chain rule of inference

قاعدة السلسلة للاستدلال

Closure property

خاصية الانغلاق

Commutative

تبديلي

Commutator	متبادل
Commutator subgroup	زمرة المتبادلات الجزئية
Complex numbers	اعداد مركبة (معقدة)
Composite	تركيب
Congruence modulo n	تطابق في مضاعفات n
Conjugate	مرافق
Containment	احتواء
Continuous function	اقتران متصل
Contrapositive	عكس الايجاب
Converse	عكس
Coset	مجموعة مرافقة
Counterexample	مثال عكسي
Cycle	دوره
Cyclic group	زمرة دورية
Cyclic subgroup generated by a	زمرة دورية جزئية متولدة من a
D	
Degree of polynomial	درجة حدودية
Determinant	محدد
Dihedral group	زمرة زوجية
Direct product	جداء مباشر
Direct sum , external	جمع مباشر ، خارجي
Disjoint sets	مجموعات منفصلة
Distributive property	خاصية التوزيع
Divisibility	قابلية القسمة
Division algorithm	خوارزمية القسمة
Divisor	قاسم (عامل)
Domain	مجال
E	
Empty set	مجموعة خالية
Equivalence	تكافؤ

Euclidean algorithm	خوارزمية اقليدس
Even permutation	تبديلية زوجية
Factor	عامل
Factor group	زمرة خارجية
Field	حقل
Field of quotients	حقل الخوارج
Fully symmetric group	زمرة تماثل تامة
Function	اقتران
Fundamental rule of inference	قاعدة الاستدلال الاساسية
G	
General of cyclic subgroup	مولد زمرة دورية جزئية
Greatest common divisor	قاسم مشترك اعظم
Group	زمرة
H	
Homomorphic image	صورة محافظة
Homomorphism	اقتران محافظ
I	
Ideal	مثالية
Idempotent element	عنصر الجمود
Identity	عنصر محايد
Image set	مجموعة الصورة
Implication	تضمن
Indeterminate	قيمة غير معينة
Index of a subgroup	دليل زمرة جزئية
Indirect proof	برهان غير مباشر
Induction	استقراء
Inequality	متباينة
Inner automorphism	اقتران محافظ ذاتي داخلي
Integer modulo n .	اعداد صحيحة في مضاعفات n

Intergral domain	حلقة كاملة
Intersection	تقاطع
Inverse of a function	عكس الاقتران
Inverse of group element	نظير لعنصر زمرة
Irreducible polynomial	حدودية غير قابلة للاختزال
Isomorphism	تشاكل
K	
Kernel of a homomorphism	نواة اقتران محانظ
L	
Lattice diagram	مخطط سهمي
Leading coefficient of polynomial	المعامل الرئيسي للحدودية
Least common multiple	المضاعف المشترك الاصغر
Least element of a set	العنصر الاصغر لمجموعة
Lemma	تمهيدية
Linear function	اقتران خطي
Logic	منطق
Logic equivalence	تكافؤ منطقي
M	
Matrix	مصفوفة
N	
Nontrivial ring	حلقة غير تافهة
Normalizer	مطيع
Normal subgroup	زمرة جزئية طبيعية
O	
Odd permutation	تبديلة فردية
One - to - one function	اقتران واحد لواحد
Onto function	اقتران شامل
Operation table	جدول عملية
Order	رتبة
Order pair	زوج مرتب

Outer automorphism	اقتران محافظ ذاتي خارجي
P	
Partition	تجزئة
Permutation	تبديلة
Permutation group	زمرة تبديلات
Polynomial	حدودية
Power of element	القوة لعنصر
Prime ideal	مثالية اولية
Prime integer	عدد اولي
Principle idea	مثالية رئيسية
Principle ideal ring	الحلقة المثالية الرئيسية
Principle of finite induction	مبدأ الاستقراء المنتهي
Proper subgroup	حلقة جزئية فعلا
Property defined binary operation	خاصية تعرف عملية ثنائية
Proposition	عرضية (عبارة ، قضية)
Q	
Quadratic formula	معادلة (صيغة) تربيعية
Quaternions	الرباعيات
Quotient group	زمرة خارجة
Quotient ring	حلقة خارجة
R	
Range	مدى
Rational number	عدد نسبي
Real number	عدد حقيقي
Reflexivity of a relation	انعكاسية لعلاقة
Remainder	الباقى
Ring	حلقة
Ring with identity	حلقة ذات عنصر محايد
Rule of separation	قاعدة الفصل
S	
Singular matrix	مصفوفة منفردة

Subfield	حقل جزئي
Subgroub	زمرة جزئية
Subring	حلقة جزئية
Subset	مجموعة جزئية
Symmetries of square	تماثلات المربع
T	
Tautology	متكررة الصواب ، تحصيل حاصل
Theorem	نظرية
Trace of a matrix	اثر مصفوفة
Transitive	تعدي
Transpose	نقلة
Trichotomy law	قانون التثليث
U	
Unequal	غير مساو
Union	اتحاد
W	
Well - ordering principle	مبدأ الترتيب الحسن
Z	
Zero divisor	القاسم الصفري
Zero of a polynomial function	صفر اقتران حدودي
Zero polynomial	حدودية صفرية